ALJABAR LINIER

NILAI EIGEN (*EIGENVALUE*)
VEKTOR EIGEN (*EIGENVECTOR*)

Wike Handini

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

- ✓ Nilai eigen menyatakan nilai karakteristik dari sebuah matriks orde n x n, yang apabila dikalikan dengan sebuah matriks orde n x n menghasilkan vektor lain yang merupakan kelipatan vektor itu sendiri.
- ✓ Jika A adalah matriks orde n x n, maka vektor tak nol x dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni $Ax = \lambda x$
- ✓ Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ

2

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Definisi:

Apabila A adalah matriks orde n x n, maka vektor tak nol x di dalam R^n disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yaitu:

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

Dimana skalar λ merupakan **nilai eigen** (***eigenvalue***) dari A dan x disebut **vektor eigen** (***eigenvector***) yang bersesuaian dengan λ

CONTOH 1

Vektor $x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena:

$$Ax = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 \times 1 + 0 \times 2\\8 \times 1 + (-1 \times 2)\end{bmatrix}$$

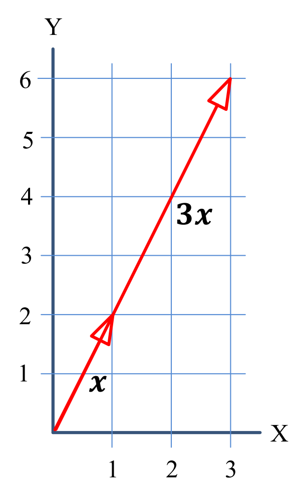
$$= \begin{bmatrix}3+0\\8-2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 3x$$

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$



NILAI EIGEN

- ✓ Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ orde n x n, maka:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda I x}$$

$$\boldsymbol{\lambda I x} - \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

- ✓ Agar λ menjadi nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$, maka $\boldsymbol{x}$ harus merupakan vektor tak nol.
- ✓ SPL diatas akan memiliki penyelesaian jika dan hanya jika koefisien matriks ***(λI −A)*** mempunyai determinan nol.

5

TEOREMA NILAI EIGEN

Apabila $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks orde n x n, maka λ adalah nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan berikut:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$

Persamaan tersebut dinamakan persamaan karakteristik dari matrik $\boldsymbol{A}$

6

CONTOH 2

Hitunglah nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi

$$\boldsymbol{det(\lambda I - A) = 0}$$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 - 0 \\ 0 - 8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) - (-8 \cdot 0) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) - 0 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 3) = 0 \qquad (\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 3 \qquad \lambda = -1$$

7

CONTOH 3

Hitunglah nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Solusi

$$\boldsymbol{det(\lambda I - A) = 0}$$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 0 & 0 - 1 & 0 - 0 \\ 0 - 0 & \lambda - 0 & 0 - 1 \\ 0 - 4 & 0 - (-17) & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix}$$

8

CONTOH 3

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \\ -4 & 17 \end{matrix}$$

$$= [(\lambda \times \lambda \times (\lambda - 8)) + ((-1) \times (-1) \times (-4)) + (0 \times 0 \times 17)] -$$

$$[(-4 \times \lambda \times 0) + (17 \times (-1) \times \lambda) + ((\lambda - 8) \times 0 \times (-1))]$$

$$= [(\lambda^2(\lambda - 8)) - 4 + 0] - [0 - 17\lambda + 0]$$

$$= [(\lambda^3 - 8\lambda^2) - 4] - [-17\lambda]$$

$$= \lambda^3 - 8\lambda^2 - 4 + 17\lambda$$

$$= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

9

CONTOH 3

$$det(\lambda I - A) = 0$$

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda = 4$$

$$\lambda = 2 + \sqrt{3} \quad = 3{,}732$$

$$\lambda = 2 - \sqrt{3} \quad = 0{,}268$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Rumus abc

$$\lambda_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - (4 \cdot 1 \cdot 1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} \quad = 2 \pm \sqrt{3}$$

10

VEKTOR EIGEN

- ✓ Vektor-vektor nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ orde n x n yang terhubung dengan nilai eigen λ merupakan vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi persamaan:

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

- ✓ Vektor eigen $\boldsymbol{x}$ merupakan vektor yang berada dalan ruang solusi:

$$\boldsymbol{(\lambda I - A)x = 0}$$

- ✓ Dimana ruang solusi merupakan suatu ruang eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang terhubung dengan nilai eigen λ

11

CONTOH 4

Hitunglah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

Solusi

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - (-3) & 0 - 1 & 0 - (-1) \\ 0 - (-7) & \lambda - 5 & 0 - (-1) \\ 0 - (-6) & 0 - 6 & \lambda - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda - 5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

12

CONTOH 4

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda+3 & -1 \\ 7 & \lambda-5 \\ 6 & -6 \end{matrix}$$

$$= [(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda+2) + ((-1)\cdot 1 \cdot 6) + (1 \cdot 7 \cdot (-6))] -$$

$$[(6 \cdot (\lambda-5) \cdot 1) + ((-6) \cdot 1 \cdot (\lambda+3)) + ((\lambda+2) \cdot 7 \cdot (-1))]$$

$$= [(\lambda^2 - 2\lambda - 15)(\lambda+2) - 6 - 42] - [(6\lambda - 30) + (-6\lambda - 18) + (-7\lambda - 14)]$$

$$= [\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - 4\lambda - 15\lambda - 30 - 48] - [-7\lambda - 62]$$

$$= \lambda^3 - 19\lambda - 78 + 7\lambda + 62$$

$$= \lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda^2 + 4\lambda + 4)(\lambda - 4) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

13

CONTOH 4

$$det(\lambda I - A) = 0$$

$$(\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0$$

$$(\lambda+2)^2 = 0 \qquad (\lambda-4) = 0$$

$$\lambda = -2 \qquad \lambda = 4$$

Vektor eigen

Misalkan vektor eigen $\boldsymbol{x}$ adalah:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

14

CONTOH 4

$\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & -1 & 1 \\ 7 & -2-5 & 1 \\ 6 & -6 & -2+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

OBE

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & -7 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} B_2 \times \frac{1}{7} \\ B_3 \times \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{7} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} B_1 - B_3 \\ B_2 - B_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

15

CONTOH 4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 0$$
$$1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$
$$\frac{1}{7}x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$
$$x_1 = x_2$$

$$x_1 = t$$
$$x_2 = t$$
$$x_3 = 0$$

vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -2$ adalah: $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

16

CONTOH 4

$\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4+3 & -1 & 1 \\ 7 & 4-5 & 1 \\ 6 & -6 & 4+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

OBE

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \quad B_1 - B_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \quad B_3 \times \frac{1}{6}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad B_2 - B_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

17

CONTOH 4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$6x_1 = 0$

$x_1 = 0$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$0 - x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = x_3$

$x_1 = 0$

$x_2 = x_3$

$x_1 = 0$

$x_2 = t$

$x_3 = t$

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda = 4$ adalah: $t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

18

SYARAT NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Jika ***A*** adalah matriks orde n x n, maka:

1. λ adalah nilai eigen dari matriks *A*
2. λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $det(\lambda I - A) = 0$
3. Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai solusi taktrivial
4. Terdapat sebuah vektor *x* yang tak nol sehingga $Ax = \lambda x$

19