ALJABAR LINIER

FUNGSI ANALITIK

Wike Handini

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

Teorema:

Apabila $f'(z)$ dari suatu fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ***ada*** di titik z_0 maka derivative parsial tingkat satu ke x dan y dari komponen-komponennya u dan v juga ada dan memenuhi syarat ***Persamaan Cauchy Riemann*** (***PCR***) sebagai berikut:

PCR

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$U_x = V_y \quad \text{dan} \quad U_y = -V_x$$

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

sedangkan $f'(z)$ dirumuskan

$$\left\{\begin{array}{l} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = U_x + iV_x \\ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = V_y - iU_y \end{array}\right.$$

selain itu dapat dinotasikan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = V_x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = V_y$$

3

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

Apabila $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdefinisikan dalam setiap *neighborhood* ε dari $z_0 = x_0 + iy_0$ sedangkan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ fungsi-fungsi nyata berharga satu dari x dan y yang bersama-sama dengan derivative parsialnya U_x ,U_y , V_x , V_y kontinu di titik $z_0 = x_0 + iy_0$ dan jika derivative parsialnya memenuhi persamaan Cauchy Riemann, maka:

$f'(z)$ ada

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

4

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

PCR dalam koordinat kartesius dapat dinyatakan dalam koordinat kutub

$z = x + iy$ → $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = x + iy$ → $z = re^{i\theta}$

$f'(z) = u + iv$ → $Re(z)$ dan $Im(z)$ dapat dinyatakan dalam $x\ dan\ y$ atau $r\ dan\ \theta$

5

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

PCR dalam bentuk kutub → $U_r = \frac{1}{r}V_\theta$ dan $V_r = -\frac{1}{r}U_\theta$

Turunannya yaitu →

$$f'(z) = e^{-i\theta}\{U_r + iV_r\}$$

atau

$$f'(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\{V_\theta - iU_\theta\}$$

6

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

Teorema:

Bila $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ terdefinisi di seluruh *neighborhood* ε titik $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ selain titik asal O, sedangkan derivative parsial pertama u *dan* v terhadap r *dan* θ ***ada*** dan fungsi ***kontinu*** pada titik (r_0, θ_0), dan bila titik derivative parsialnya memenuhi PCR bentuk polar maka $\boldsymbol{f'(z)}$ ada

7

CONTOH 14

Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2$ memiliki turunan melalui PCR dan tentukan turunannya

Solusi

Diketahui $f(z) = z^2$, berdasarkan rumus diperoleh bahwa $f'(z) = 2z$ ada di setiap titik, sehingga syarat PCR terpenuhi di setiap titik

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

Sehingga:

$$\left.\begin{array}{lll} u = (x^2 - y^2) & \longrightarrow & u_x = 2x \quad \text{dan} \quad u_y = -2y \\ v = 2xy & \longrightarrow & v_x = 2y \quad \text{dan} \quad v_y = 2x \end{array}\right\}$$

Ternyata PCR terpenuhi, yaitu:

$$u_x = v_y \quad \text{dan} \quad u_y = -v_x$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i(2y) = 2(x + iy) = 2z$$

8

CONTOH 15

Jika $w = f(z) = z^2 + 3z$, carilah nilai u dan v serta hitung nilai $f(1+3i)$

Solusi

$$f(z) = z^2 + 3z$$
$$= (x+iy)^2 + 3(x+iy)$$
$$= (x^2 - y^2) + i(2xy) + 3x + i(3y)$$
$$= (x^2 - y^2 + 3x) + i(2xy + 3y)$$
$$u = x^2 - y^2 + 3x$$
$$v = 2xy + 3y$$

$$f(z) = z^2 + 3z$$
$$f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i)$$
$$= 1 + 6i + 9i^2 + 3 + 9i$$
$$= -5 + 15i$$
$$u(1,3) = -5$$
$$v(1,3) = 15$$

9

CONTOH 16

Tunjukkan bahwa $f(z) = iz$ memiliki turunan melalui PCR dan tentukan turunannya

Solusi

$$f(z) = iz = i(x+iy) = -y + ix$$

$$\left.\begin{array}{lll} u = -y & \longrightarrow & u_x = 0 \quad \text{dan} \quad u_y = -1 \\ v = x & \longrightarrow & v_x = 1 \quad \text{dan} \quad v_y = 0 \end{array}\right\}$$

PCR terpenuhi, yaitu:

$$u_x = v_y \quad \text{dan} \quad u_y = -v_x$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i = i$$

10