ALJABAR LINIER

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Wike Handini

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

- ✓ Jika pada setiap nilai variabel kompleks z terdapat satu atau lebih nilai dari variabel kompleks w adalah suatu fungsi dari z yang dituliskan:

$$\boldsymbol{w = f(z)} \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{w = g(z)}$$

- ✓ Variabel z disebut suatu variabel bebas dan w disebut variabel tak bebas dan nilai suatu fungsi di $z = a$ maka dituliskan: $\boldsymbol{f(a)}$

2

CONTOH 10

Jika $f(z) = z^2$ maka tentukan nilai dari $f(5i)$

Solusi

$$f(z) = z^2$$

$$f(5i) = (5i)^2$$

$$= 25i^2 \quad = -25$$

3

CONTOH 11

Jika $f(z) = 2z^2 + 7$ maka tentukan nilai dari $f(3i)$

Solusi

$$f(z) = 2z^2 + 7$$

$$f(3i) = 2(3i)^2 + 7$$

$$= 2(9i^2) + 7$$

$$= -18 + 7 \quad = -11$$

4

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Apabila fungsi $w = f(z) = z^2$ atau $w = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$, maka diperoleh:

$$w = x^2 - y^2 + i2xy \quad \rightarrow \quad u = x^2 - y^2 \; dan \; v = 2xy$$

Hal ini berarti bahwa tiap fungsi kompleks $w = f(z)$ berkorespondensi dengan dua fungsi nyata $u(x, y) \; dan \; v(x, y)$ dituliskan:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Apabila variabel $z = (x, y)$ dinyatakan dalam bentuk kutub $x = (r, \theta)$, $y = (r, \theta)$ maka $w = f(z)$ dapat dinyatakan:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

5

CONTOH 12

Tentukan bentuk kutub dari $w = f(z) = z^2$

Solusi

Bentuk kutub dari $w = f(z) = z^2$ atau $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2$, yaitu:

$$w = r^2 (\cos\theta + i \sin\theta)^2 \quad = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \quad = r^2 \cos 2\theta + i\, r^2 \sin 2\theta$$

dengan:

$$u = r^2 \cos 2\theta \quad \text{dan} \quad v = r^2 \sin 2\theta$$

6

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

- ✓ **Limit Fungsi**

  Fungsi $w = f(z)$ dikatakan memiliki limit $w_0 = L$ pada saat z mendekati z_0 dituliskan: $\lim_{Z \to Z_0} f(z) = L$

- ✓ **Kontinuitas Fungsi**

  Fungsi $w = f(z)$ kontinu di titik z_0 bila hanya bila:

  a. $f(z_0)$ ada

  b. $\lim_{Z \to Z_0} f(z)$ ada

  c. $\lim_{Z \to Z_0} f(z) = z_0$

7

TURUNAN FUNGSI

Apabila $f(z)$ bernilai tunggal dalam sejumlah daerah dari bidang z maka turunan $f(z)$ yang dinyatakan oleh $f'(z)$ yaitu:

$$\lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

dengan syarat terdapat limit yang tidak tergantung pada cara bagaimana $\Delta z \to 0$

8

TURUNAN FUNGSI

Apabila $w = f(z)$ maka:

$$f'(z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \frac{dw}{dz}$$

dapat dikatakan bahwa notasi-notasi fungsi turunan dari f atau disingkat turunan f adalah

$f'(z)$ atau $\frac{df}{dz}$ atau $\frac{dw}{dz}$

9

RUMUS-RUMUS DERIVATIVE

1. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$
2. $\frac{d}{dz}(z) = 1$
3. $\frac{d}{dz}(C) = 0$
4. $\frac{d}{dz}(Cf(z)) = C\frac{d}{dz}(f(z))$
5. $\{f(z) + g(z)\}' = f'(z) + g'(z)$
6. $\{f(z) - g(z)\}' = f'(z) - g'(z)$
7. $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
8. $\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$
9. $\{f(g(z))\}' = f'(z)g'(z)$

10

CONTOH 13

Tentukan $\frac{d}{dz}$ dari:

a. $[(z^3 - z^{-2})(z^2 + 5)]$

b. $(z^{-1} + 2z + 3)^4$

c. $\left(\frac{z^4 - 3}{z^2 + 1}\right)$

Solusi

a. $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

$$\frac{d}{dz}[(z^3 - z^{-2})(z^2 + 5)] = (z^3 - z^{-2})\frac{d}{dz}(z^2 + 5) + (z^2 + 5)\frac{d}{dz}(z^3 - z^{-2})$$

$$= (z^3 - z^{-2})2z + (z^2 + 5)(3z^2 - (-2)z^{-3})$$

$$= (z^3 - z^{-2})2z + (z^2 + 5)(3z^2 + 2z^{-3})$$

11

CONTOH 13

b. $\{f(g(z))\}' = f'(z)g'(z)$

$$\frac{d}{dz}(z^{-1} + 2z + 3)^4 = 4(z^{-1} + 2z + 3)^3 \;\; -z^{-2} + 2$$

c. $\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4 - 3}{z^2 + 1}\right) = \frac{4z^3(z^2 + 1) - (z^4 - 3)2z}{(z^2 + 1)^2}$$

12