MATEMATIKA DISKRIT

GRAF TAK BERARAH & GRAF BERARAH

Wike Handini

GRAF TAK BERARAH → PATH dan SIRKUIT

Definisi

- Misalkan G adalah suatu Graf, sedangkan v dan w adalah 2 titik dalam G.
- Suatu Walk dari v ke w adalah barisan titik-titik berhubungan dan garis secara berselang-seling, diawali dari titik v dan berakhir pada titik w.

- Walk dengan panjang n dari v ke w dituliskan: $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots.\ v_{n-1}\ e_n\ v_n$ dengan $v_0 = v$; $v_n = w$; v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik ujung garis e_i
- Path dengan panjang n dari v ke w adalah walk dari v ke w yang semua garisnya berbeda. Path dari v ke w dituliskan sebagai $v = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots.\ v_{n-1}\ e_n\ v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$.

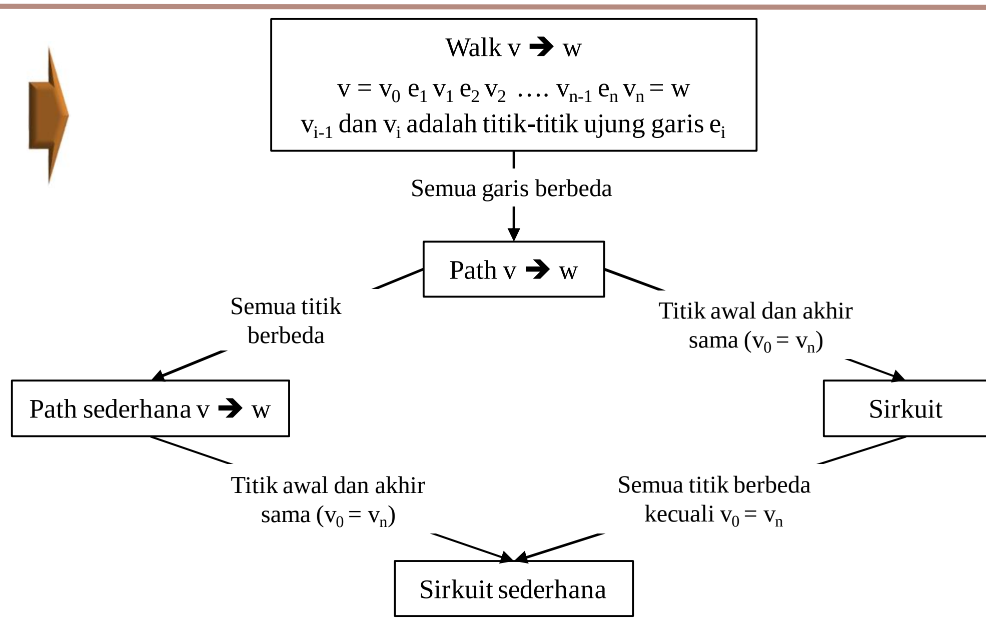
GRAF TAK BERARAH → PATH dan SIRKUIT

- Path sederhana dengan panjang n dari v ke w adalah Path dari v ke w yang semua titiknya berbeda. Path sederhana dari v ke w berbentuk $v = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots.\ v_{n-1}\ e_n\ v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$ dan $v_k \neq v_m$ untuk $k \neq m$.
- Sirkuit dengan panjang n dari v ke w adalah Path yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama. Sirkuit adalah path yang berbentuk $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots.\ v_{n-1}\ e_n\ v_n$ dengan $v_0 = v_n$
- Sirkuit sederhana dengan panjang n adalah Sirkuit yang semua titiknya berbeda. Sirkuit sederhana berbentuk $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots.\ v_{n-1}\ e_n\ v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$ dan $v_k \neq v_m$ untuk $k \neq m$, kecuali $v_0 = v_n$

3

GRAF TAK BERARAH → PATH dan SIRKUIT

Diagram rangkuman definisi

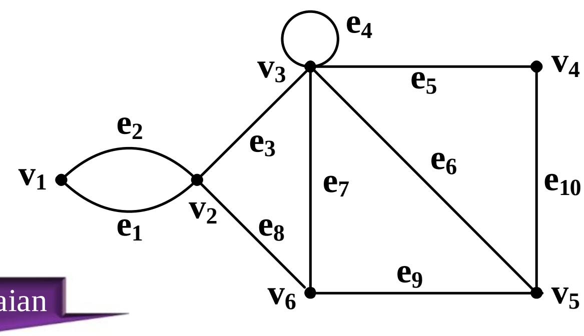


4

CONTOH 11

Tentukan mana diantara barisan titik dan garis pada gambar yang merupakan walk, path, path sederhana, sirkuit, dan sirkuit sederhana.

a. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
b. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_5\ v_3\ e_6\ v_5$
c. $v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_{10}\ v_5\ e_6\ v_3\ e_7\ v_6\ e_8\ v_2$
d. $v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_{10}\ v_5\ e_9\ v_6\ e_8\ v_2$
e. v_1

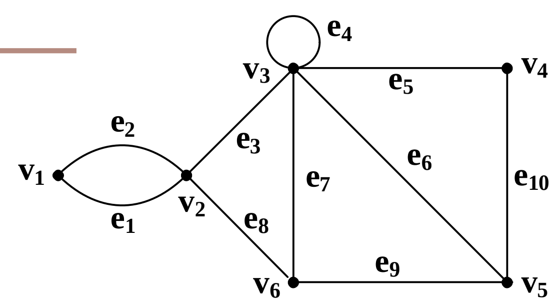


Penyelesaian

a. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
Semua garis berbeda (e_1, e_3, e_4, e_5), ada titik yang berulang (v_3), titik awal (v_1) dan titik akhir (v_4) tidak sama. Kesimpulan ➔ Path dari v_1 ke v_4 dengan panjang 4

5

CONTOH 11 ➔ Penyelesaian



b. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_5\ v_3\ e_6\ v_5$
Ada garis yang muncul lebih dari sekali (e_5). Kesimpulan ➔ walk dari v_1 ke v_5 dengan panjang 5

c. $v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_{10}\ v_5\ e_6\ v_3\ e_7\ v_6\ e_8\ v_2$
Semua garis berbeda ($e_3, e_5, e_{10}, e_6, e_7, e_8$). Ada titik berulang ($v_3$). Titik awal dan akhir sama. Kesimpulan ➔ sirkuit dengan panjang 6

d. $v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_{10}\ v_5\ e_9\ v_6\ e_8\ v_2$
Semua garis dan titiknya berbeda. Titik awal dan akhir sama (v_2). Kesimpulan ➔ sirkuit sederhana dengan panjang 5

6

CONTOH 11 ➔ Penyelesaian

e. v_1

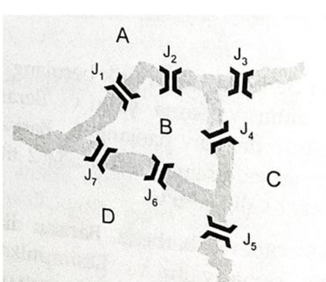
Karena hanya memuat satu titik, maka tidak ada garis dan titik yang sama. Titik awal dan akhir sama. Kesimpulan ➔ sirkuit sederhana (sering disebut sirkuit trivial)

Apabila tidak membingungkan, penulisan barisan dapat disingkat dengan hanya menuliskan titik saja atau garis saja. Misalnya contoh b (v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_4 e_5 v_3 e_6 v_5), dapat dituliskan e_1 e_3 e_5 e_5 e_6. Contoh c (v_2 e_3 v_3 e_5 v_4 e_{10} v_5 e_6 v_3 e_7 v_6 e_8 v_2) dapat dituliskan v_2 v_3 v_4 v_5 v_3 v_6 v_2. Akan tetapi contoh a (v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_4) tidak dapat dituliskan v_1 v_2 v_3 v_3 v_4 karena tidak jelas apakah walk dari v_1 ke v_2 melalui e_1 atau e_2

GRAF TAK BERARAH ➔ SIRKUIT EULER

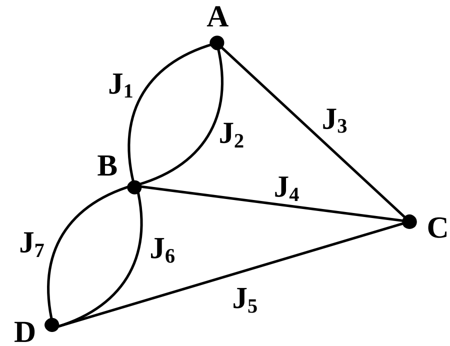
Definisi

- Misalkan G adalah suatu Graf. Sirkuit Euler G adalah sirkuit dimana setiap titik dalam G muncul paling sedikit sekali dan setiap garis dalam G muncul tepat satu kali.
- Definisi ini untuk mengenang ahli matematika Leonhard Euler yang memperkenalkan graf untuk memecahkan masalah 7 jembatan Königsberg pada tahun 1736.
- Kota Königsberg dibangun pada pertemuan 2 cabang sungai, terdiri dari sebuah pulau ditengah dan 7 jembatan disekelilingnya (seperti terlihat pada gambar). J_1, ……, J_7 adalah jembatan-jembatan yang menghubungkan ke 4 daerah (A, …., D).



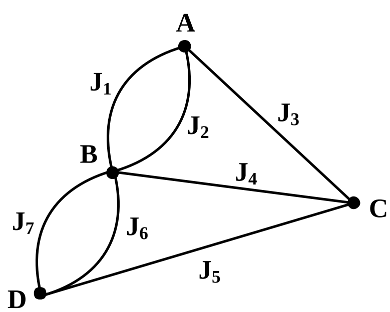
GRAF TAK BERARAH → SIRKUIT EULER

- Masalahnya adalah apakah memungkinkan untuk berjalan mengelilingi kota yang dimulai dan diakhiri pada tempat yang sama, dengan melintasi ketujuh jembatan masing-masing tepat satu kali?
- Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler merepresentasikannya dalam graf. Titik-titik dalam graf menyatakan daerah-darerah, dan garis-garis menyatakan jembatan. Graf yang sesuai dengan masalah 7 jembatan tersebut adalah sebagai berikut:



9

GRAF TAK BERARAH → SIRKUIT EULER



- Sebagai graf, masalah 7 jembatan tersebut dinyatakan sebagai berikut:

  Apakah ada cara untuk mengunjungi semua titik dalam graf (A …. D) dengan diawali dan diakhiri titik tertentu dan setiap garis (J_1, ……, J_7) dilalui tepat satu kali?

  Atau

  Apakah graf tersebut merupakan sirkuit Euler?

  Ternyata hal tersebut tidak dimungkinkan, sehingga graf ini bukan merupakan sirkuit Euler

10

GRAF TAK BERARAH → GRAF TERHUBUNG dan TIDAK TERHUBUNG

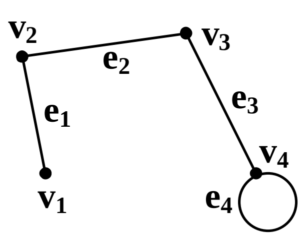
Definisi

- Misalkan G adalah suatu Graf. Dua titik v dan w dalam G dikatakan terhubung bila dan hanya bila ada walk dari v ke w.
- Graf G dikatakan terhubung bila dan hanya bila setiap 2 titik dalam G terhubung.
- Graf G dikatakan tidak terhubung bila dan hanya bila ada 2 titik dalam G yang tidak terhubung.

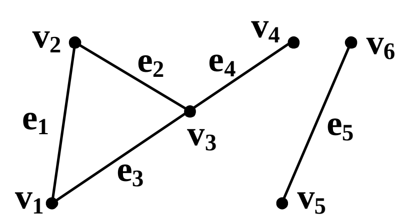
CONTOH 12

Manakah diantara graf berikut yang merupakan graf terhubung

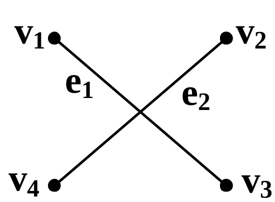
a.



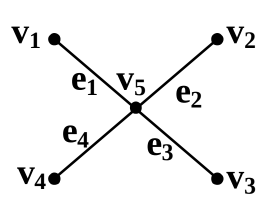
b.



c.

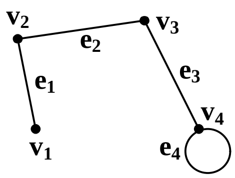


d.



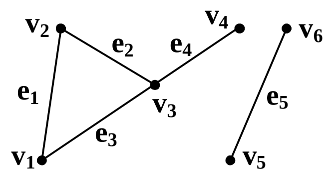
CONTOH 12 → Penyelesaian

a.



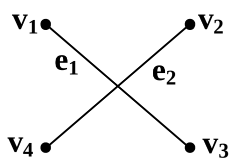
Graf terhubung

b.



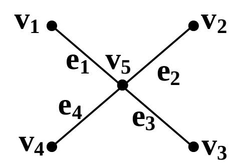
Graf tidak terhubung karena tidak ada walk dari v_5 ke v_4

c.



Graf tidak terhubung karena tidak ada walk dari v_2 ke v_3

d.



Graf terhubung

GRAF TAK BERARAH → GRAF TERHUBUNG dan TIDAK TERHUBUNG

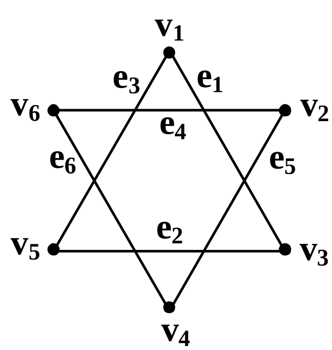
Teorema

- Misalkan G adalah graf terhubung.
- G adalah sirkuit Euler bila dan hanya bila semua titik dalam G memiliki derajat genap.

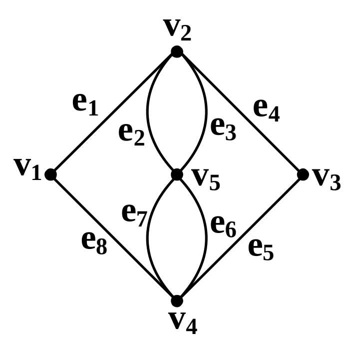
Contoh 13

Tentukan mana di antara graf-graf berikut yang merupakan sirkuit Euler

a.



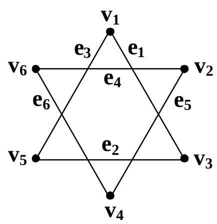
b.



GRAF TAK BERARAH ➔ GRAF TERHUBUNG dan TIDAK TERHUBUNG

<u>Penyelesaian</u>

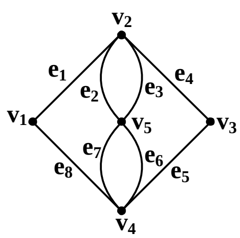
a.



$d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 2$

Meskipun semua titik berderajat 2 (genap), tetapi grafnya tidak terhubung, sehingga graf ini bukan sirkuit Euler.

b.



$d(v_1) = d(v_3) = 2$

$d(v_2) = d(v_4) = d(v_5) = 4$

Oleh karena graf terhubung dan semua titiknya berderajat genap, maka graf ini merupakan sirkuit Euler.

GRAF TAK BERARAH ➔ SIRKUIT HAMILTON

Definisi

- Suatu graf terhubung G disebut Sirkuit Hamilton bila ada sirkuit yang mengunjungi setiap titiknya tepat satu kali (kecuali titik awal yang sama dengan titik akhirnya).

- Perbedaan sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton:

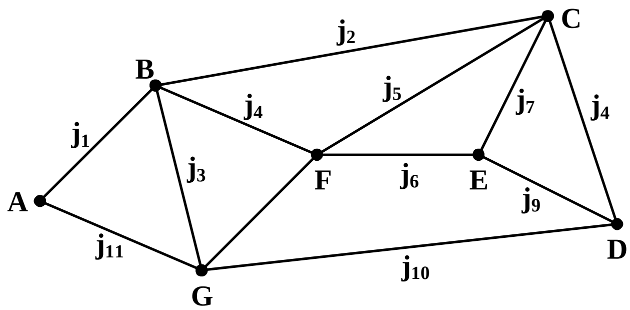
  Sirkuit Euler ➔ semua garis harus dilalui tepat satu kali, sedangkan semua titiknya boleh dikunjungi lebih dari satu kali.

  Sirkuit Hamilton ➔ semua titik harus dikunjungi tepat satu kali dan tidak harus melalui semua garisnya.

  Dalam sirkuit Euler yang dipentingkan adalah garisnya, sebaliknya dalam sirkuit Hamilton yang dipentingkan adalah kunjungan pada titiknya.

CONTOH 14

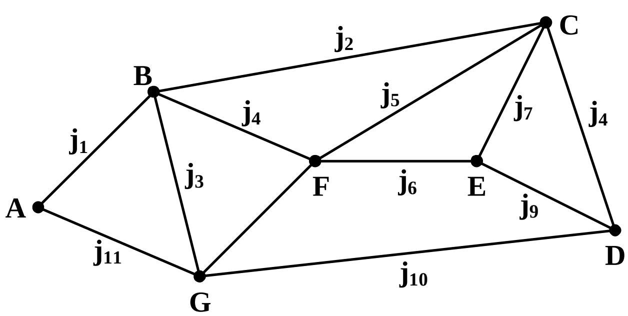
Graf berikut ini menyatakan peta beberapa kota (A ….. G) beserta jalan-jalan yang menghubungkan kota-kota tersebut.



Seorang penjaja (salesman) hendak mengunjungi setiap kota masing-masing satu kali, dimulai dari kota A. Carilah jalan yang dilalui salesman tersebut.

17

CONTOH 14 → Penyelesaian



Beberapa alternatif jalur yang mungkin adalah:

- ABCDEFGA
- ABFCEDGA
- ABFECDGA
- ABCFEDGA

18

GRAF TAK BERARAH → SIRKUIT HAMILTON

- Jika G merupakan sirkuit Hamilton, maka G memiliki subgraf H dengan sifat-sifat:
  1. H terhubung.
  2. H memuat semua titik G.
  3. H memiliki jumlah garis yang sama dengan jumlah titiknya.
  4. Setiap titik dalam H memiliki derajat 2.
- Syarat 1 dan 2 merupakan definisi sirkuit Hamilton yang mengharuskan semua titik dikunjungi dalam G.
- Syarat 4 ada sebagai akibat kunjungan semua titik yang hanya boleh dilakukan sekali. Selama kunjungan, di setiap titik pasti ada satu garis masuk dan satu garis keluar sehingga derajat setiap titik = 2.

19

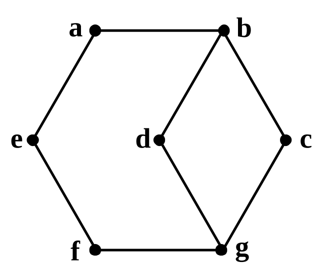
GRAF TAK BERARAH → SIRKUIT HAMILTON

- Oleh karena dalam sirkuit Hamilton, setiap dua titik dihubungkan dengan tepat satu garis, maka jumlah garis sama dengan jumlah titiknya (dinyatakan dalam syarat 3).
- Jika salah satu dari ke-4 syarat tersebut tidak dipenuhi, maka bukan graf Hamilton.

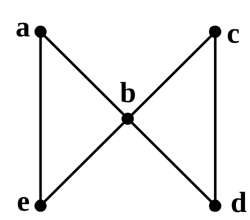
Contoh 15

Buktikan bahwa graf berikut bukanlah sirkuit Hamilton.

a.



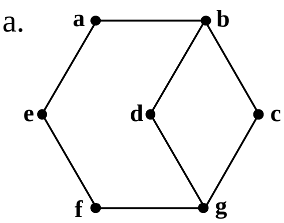
b.



20

CONTOH 15 → Penyelesaian

a.

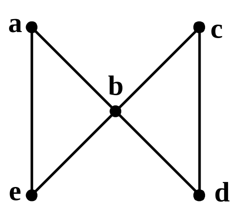


- ✓ Misalkan graf G ini adalah sirkuit Hamilton, maka G memiliki subgraf H dengan sifat:
  1. H memuat semua titik dalam G (ada 7 titik yaitu a, b, …. g).
  2. Jumlah garis dalam H sama dengan jumlah titiknya, yaitu 7.
  3. Semua garis dalam H berderajat 2.
- ✓ Titik b dan g berderajat 3 sehingga salah satu garisnya harus dihilangkan. Dengan demikian, ada 2 garis yang harus dihilangkan dari G. Padahal jumlah garis dalam G adalah 8, dengan penghilangan 2 garis ini menyebabkan jumlah garis menjadi 6. Akibatnya tidak mungkin subgraf H memuat 7 garis.
- ✓ Dengan demikian graf ini bukanlah sirkuit Hamilton.

21

CONTOH 15 → Penyelesaian

b.



- ✓ Misalkan graf G ini adalah sirkuit Hamilton, maka dengan cara yang sama dengan penyelesaian a, maka subgraf H yang terbentuk haruslah memiliki jumlah garis 5 (sesuai dengan jumlah titik) dan tiap titik harus berderajat 2.
- ✓ Titik b berderajat 4 sehingga harus ada 2 garis yang dihilangkan. Akan tetapi penghilangan satu garis saja akan menyebabkan suatu titik lain (a, c, d atau e) berderajat 1 (ganjil), sehingga tidak mungkin dibentuk subgraf H dengan sifat tersebut.
- ✓ Dengan demikian graf ini bukanlah sirkuit Hamilton.

22

GRAF BERARAH

GRAF BERARAH (*DIRECTED GRAPH* = DIGRAPH)

Definisi

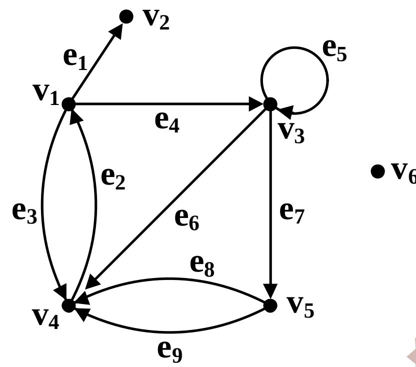
- Suatu graf berarah G terdiri dari:
  Himpunan titik-titik V(G): $\{v_1, v_2, \dots\}$, himpunan garis-garis E(G): $\{e_1, e_2, \dots\}$, dan suatu fungsi ψ yang mengawankan setiap garis dalam E(G) ke suatu pasangan berurutan titik (v_i,v_j).

- Jika $e_k = (v_i,v_j)$ adalah suatu garis dalam G, maka v_1 disebut titik awal e_k dan v_j disebut titik akhir e_k. Arah garis adalah dari v_i ke v_j.
- Jumlah garis yang keluar dari titik v_i disebut derajat keluar (*out degree*) titik v_i (simbol $d^+(v_i)$), sedangkan jumlah garis yang menuju ke titik v_i disebut derajat masuk (*in degree*) titik v_i, yang disimbolkan $d^-(v_i)$.
- Titik terasing adalah titik dalam G dimana derajat keluar dan derajat masuknya adalah 0.

24

GRAF BERARAH (*DIRECTED GRAPH* = DIGRAPH)

- Titik pendan adalah titik dalam G dimana jumlah derajat keluar dan derajat masuknya = 1.
- Dua garis berarah dikatakan paralel jika keduanya memiliki titik awal dan titik akhir yang sama.



<u>Contoh 16</u>

Dari graf berikut, tentukan:

a. Himpunan titik-titik, himpunan garis-garis dan fungsi perkawanan ψ
b. Derajat masuk dan derajat keluar tiap-tiap titik.
c. Titik terasing dan titik pendan.
d. Garis paralel.

25

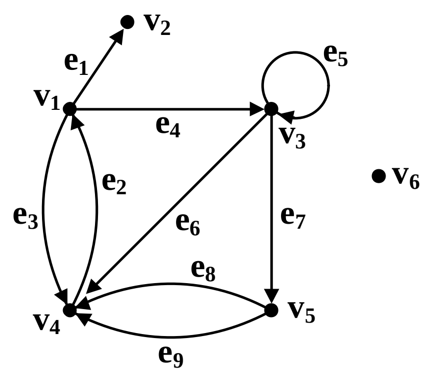
CONTOH 16 → Penyelesaian

a. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

Fungsi ψ mengawankan garis-garis dengan pasangan titik-titik berikut:

e_1 dengan (v_1, v_2)
e_2 dengan (v_4, v_1)
e_3 dengan (v_1, v_4)
e_4 dengan (v_1, v_3)
e_5 dengan (v_3, v_3)
e_6 dengan (v_3, v_4)
e_7 dengan (v_3, v_5)
e_8 dengan (v_5, v_4)
e_9 dengan (v_5, v_4)



26

CONTOH 16 → Penyelesaian

b. $d^+(v_1) = 3; d^-(v_1) = 1$

$d^+(v_2) = 0; d^-(v_2) = 1$

$d^+(v_3) = 3; d^-(v_3) = 2$

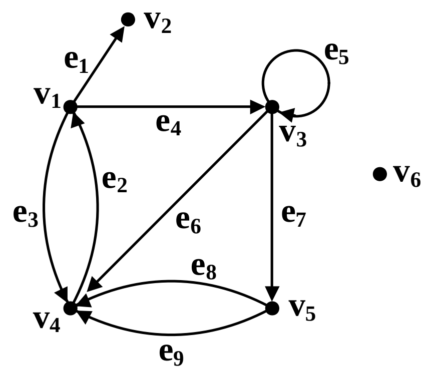
$d^+(v_4) = 1; d^-(v_4) = 4$

$d^+(v_5) = 2; d^-(v_5) = 1$

$d^+(v_6) = 0; d^-(v_6) = 0$

c. Titik terasing adalah v_6. Titik pendan adalah v_2

d. Garis paralel adalah e_8 dan e_9



27

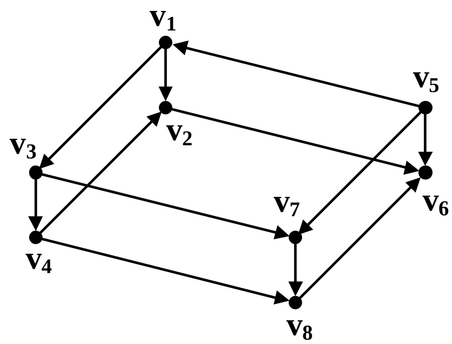
GRAF BERARAH → PATH BERARAH DAN SIRKUIT BERARAH

- Pengertian walk, path, sirkuit dalam graf berarah sama dengan walk, path dan sirkuit dalam graf tak berarah. Hanya saja dalam graf berarah, perjalanan yang dilakukan harus mengikuti arah garis.
- Untuk membedakan dengan graf tak berarah, maka walk, path dan sirkuit dalam graf berarah disebut walk berarah, path berarah dan sirkuit berarah.
- Suatu graf berarah yang tidak memuat sirkuit berarah disebut Asiklik.

28

CONTOH 17

Tentukan path berarah terpendek dari titik v_5 ke titik v_2 pada graf berarah berikut.



Penyelesaian

Ada beberapa path berarah dari v_5 ke titik v_2 yang dapat dilakukan, yaitu: $v_5\ v_1\ v_3\ v_4\ v_2$

$v_5\ v_1\ v_2$

Path terpendek adalah $v_5\ v_1\ v_2$ dengan panjang = 2

GRAF BERARAH → GRAF TERHUBUNG

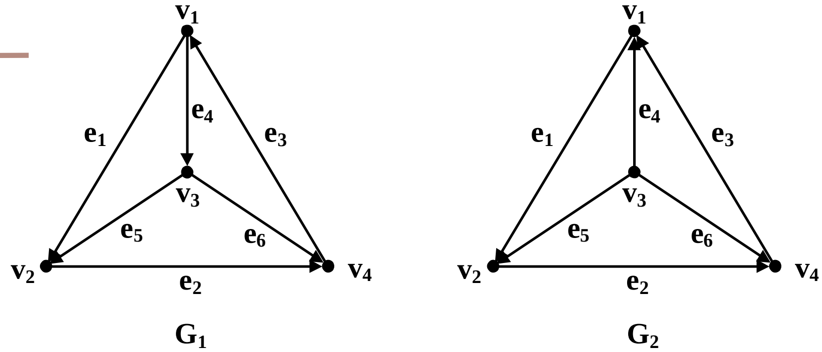
- Suatu graf tak berarah disebut terhubung jika ada walk yang menghubungkan setiap dua titiknya. Pengertian ini juga berlaku bagi graf berarah.
- Berdasarkan arah garisnya, dalam graf berarah dikenal dua jenis keterhubungan , yaitu terhubung kuat dan terhubung lemah.

Definisi

- Misalkan G adalah suatu graf berarah dan v,w adalah sembarang titik dalam G.
- G disebut terhubung kuat jika ada path berarah dari v ke w.
- G disebut terhubung lemah, jika G tidak terhubung kuat, tetapi graf tak berarah yang berkesesuaian dengan G terhubung.

CONTOH 18

Manakah diantara graf berikut yang terhubung kuat dan terhubung lemah.



Penyelesaian

- Dalam G_1, setiap 2 titik dapat dihubungkan dengan path berarah, sehingga graf berarah G_1 adalah graf terhubung kuat.
- Sebaliknya dalam G_2, tidak ada path berarah yang menghubungkan v_4 ke v_3. Akan tetapi, jika semua arah garis dihilangkan (sehingga G_2 menjadi graf tidak berarah), maka G_2 merupakan graf yang terhubung. Jadi graf G_2 merupakan graf terhubung lemah.

31