



MATEMATIKA DISKRIT

RANGKAIAN LOGIKA

Wike Handini

RANGKAIAN LOGIKA

Selain sebagai struktur aljabar, aljabar Boole juga diaplikasikan dalam rangkaian listrik. Analogi antara struktur aljabar dan rangkaian listrik adalah sebagai berikut:

Jenis	Gambar	Arti
Saklar Terbuka		0
Saklar Tertutup		1
Rangkaian Seri		$p \wedge q (= pq)$
Rangkaian Paralel		$p \vee q$

RANGKAIAN LOGIKA

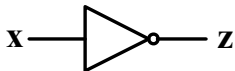
- ✓ Kombinasi sinyal-sinyal berbentuk bit-bit dapat diteruskan ke komponen-komponen lain dengan berbagai macam rangkaian.
- ✓ Para ahli menyepakati dibuatlah rangkaian-rangkaian dalam kotak hitam (*black box*) dengan hubungan antara sinyal masukan dan keluaran sebagai berikut:



- ✓ Rangkaian yang rumit dapat disusun dari unit-unit kecil yang disebut gerbang (*gates*).
- ✓ Suatu gerbang tertentu bersesuaian dengan fungsi Boole sederhana.

3

GERBANG-GERBANG (*GATES*)

Nama Gerbang	Simbol	Ekuivalensi dalam Aljabar Boole
NOT		$z = x'$
OR		$z = x \vee y$
AND		$z = xy$

4

GERBANG-GERBANG (*GATES*)

Nama Gerbang	Simbol	Ekuivalensi dalam Aljabar Boole
NOR		$z = (x \vee y)'$ (Not OR)
NAND		$z = (xy)'$ (Not AND)
XOR		$z = x \oplus y$

5

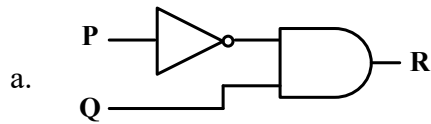
GERBANG-GERBANG (*GATES*)

		NOT	OR	AND	NOR	NAND	XOR
x	y	x'	x ∨ y	xy	(x ∨ y)'	(xy)'	x ⊕ y
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0

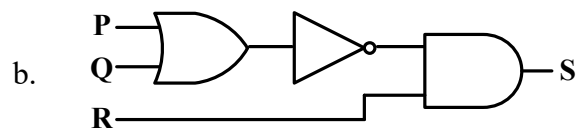
6

CONTOH 8

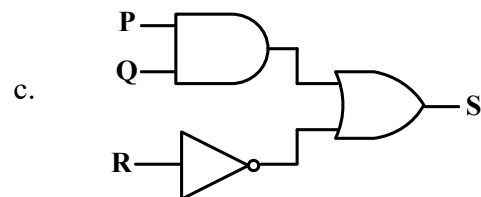
Tentukan keluaran untuk masukan-masukan yang diberikan dari rangkaian berikut ini:



Masukan: $P = 0$; $Q = 1$



Masukan: $P = 1$; $Q = 0$; $R = 1$

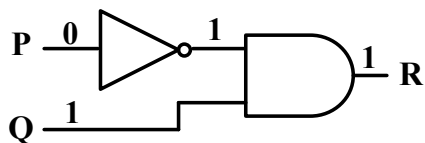


Masukan: $P = 0$; $Q = 1$; $R = 0$

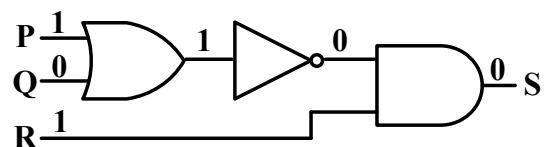
7

CONTOH 8 → Penyelesaian

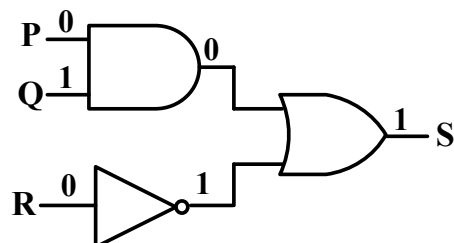
a. Masukan: $P = 0$; $Q = 1$



b. Masukan: $P = 1$; $Q = 0$; $R = 1$



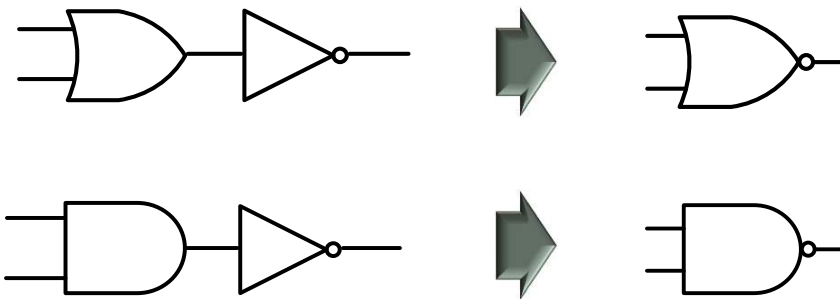
c. Masukan: $P = 0$; $Q = 1$; $R = 0$



8

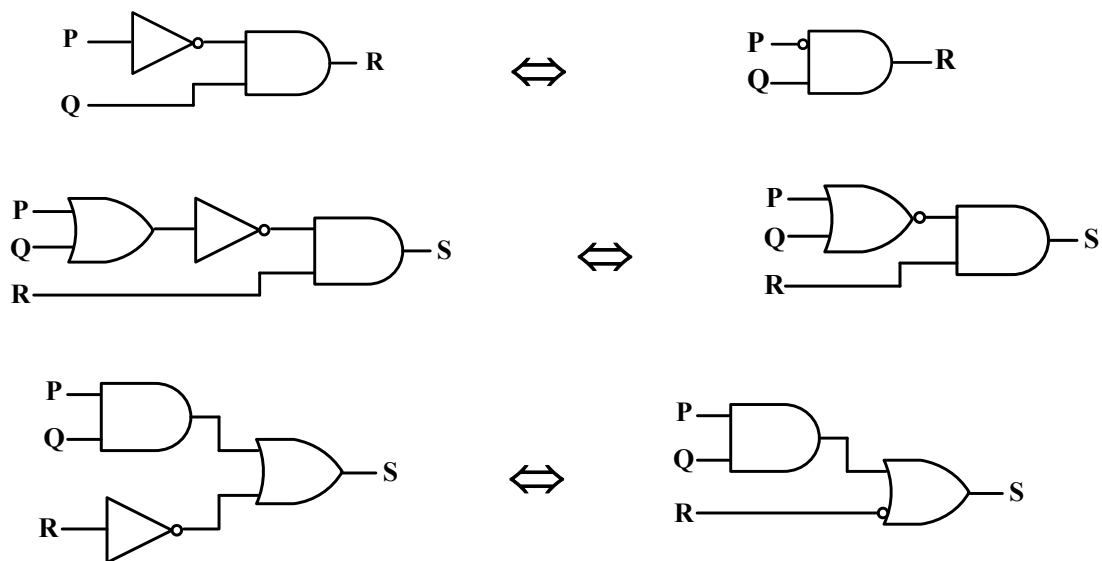
RANGKAIAN LOGIKA

Untuk menyingkat gambar, gerbang NOT sering digabungkan langsung dengan gerbang lain dengan cara menggambarkan lingkaran kecil pada garis sinyal untuk menyatakan komplemen sinyal pada garis tersebut (seperti gerbang NOR dan NAND).



9

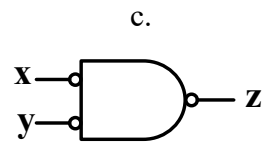
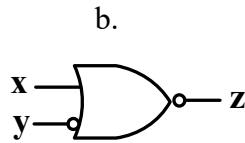
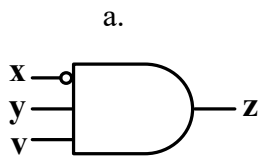
RANGKAIAN LOGIKA



10

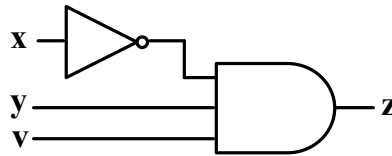
CONTOH 9

Carilah ekspresi Boole yang sesuai dengan gerbang berikut:



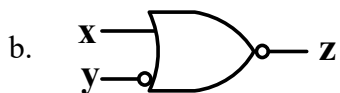
Penyelesaian

a. $z = x'yv$



11

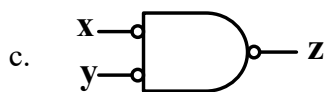
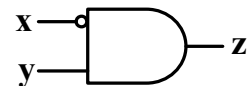
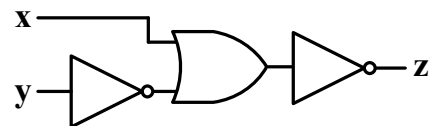
CONTOH 9



$$\begin{aligned} z &= (x \vee y)'\end{aligned}$$

$$= x' \wedge (y)'$$

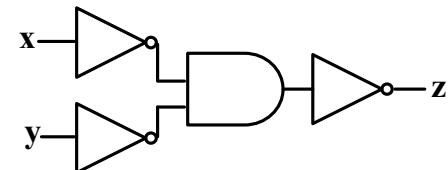
$$= x'y$$



$$\begin{aligned} z &= (x'y)'\end{aligned}$$

$$= (x')' \vee (y)'$$

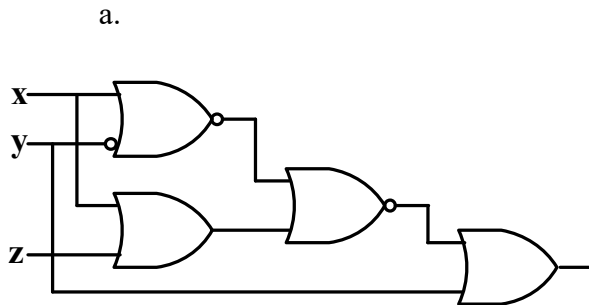
$$= x \vee y$$



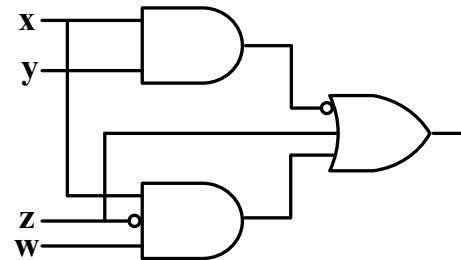
12

CONTOH 10

Carilah ekspresi Boole rangkaian berikut:

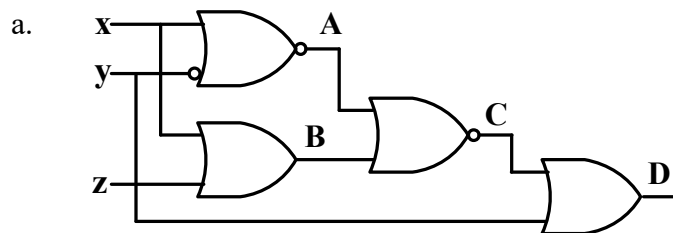


b.



13

CONTOH 10 → Penyelesaian



Keluaran gerbang A $\rightarrow (x \vee y)'$

Keluaran gerbang B $\rightarrow x \vee z$

Keluaran gerbang C $\rightarrow ((x \vee y)' \vee (x \vee z))'$

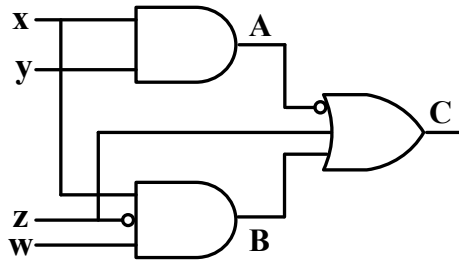
Keluaran gerbang D $\rightarrow ((x \vee y)' \vee (x \vee z))' \vee y$

Dengan demikian ekspresi Boole yang sesuai adalah $((x \vee y)' \vee (x \vee z))' \vee y$

14

CONTOH 10 → Penyelesaian

b.



Keluaran gerbang A $\rightarrow xy$

Keluaran gerbang B $\rightarrow xz'w$

Keluaran gerbang C $\rightarrow (xy)' \vee z \vee xz'w$

Dengan demikian ekspresi Boole yang sesuai adalah $(xy)' \vee z \vee xz'w$

15

RANGKAIAN LOGIKA

Rangkaian digital dapat dinyatakan sebagai ekspresi Boole, dengan demikian ekspresi Boole tersebut dapat disederhanakan dengan menggunakan hukum-hukum yang berlaku dalam aljabar Boole sehingga rangkaian menjadi lebih sederhana.

CONTOH 11

Sederhanakan rangkaian pada contoh 10a dan 10b

a. Ekspresi Boole:

$$((x \vee y)' \vee (x \vee z))' \vee y$$

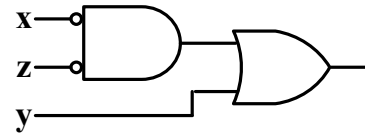
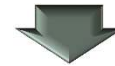
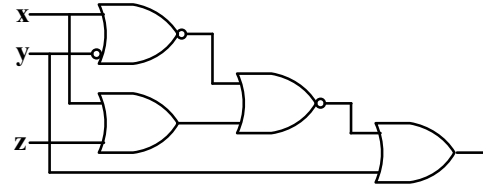
b. Ekspresi Boole:

$$(xy)' \vee z \vee xz'w$$

16

CONTOH 11 → Penyelesaian a

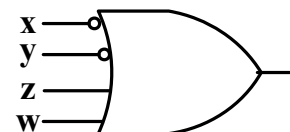
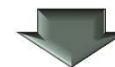
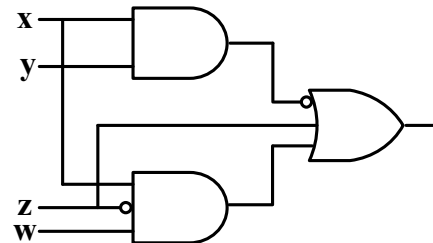
$$\begin{aligned}
 ((x \vee y')' \vee (x \vee z))' \vee y &= ((x \vee y')(x \vee z')) \vee y \\
 &= ((x \vee y')(x'z')) \vee y \\
 &= (xx'z' \vee y'x'z') \vee y \\
 &= 0z' \vee y'x'z' \vee y \\
 &= y'x'z' \vee y \\
 &= y'x'z' \vee y.1 \\
 &= y'x'z' \vee y(x'z' \vee 1) \\
 &= y'x'z' \vee yx'z' \vee y \\
 &= (y' \vee y)x'z' \vee y \\
 &= x'z' \vee y
 \end{aligned}$$



17

CONTOH 11 → Penyelesaian b

$$\begin{aligned}
 (xy)' \vee z \vee xz'w &= x' \vee y' \vee z \vee xz'w \\
 &= x' \vee y' \vee z.1 \vee xz'w \\
 &= x' \vee y' \vee z(1 \vee xw) \vee xz'w \\
 &= x' \vee y' \vee z \vee zxw \vee xz'w \\
 &= x' \vee y' \vee z \vee xw(z \vee z') \\
 &= x' \vee y' \vee z \vee xw \\
 &= x'.1 \vee y' \vee z \vee xw \\
 &= x'(1 \vee w) \vee y' \vee z \vee xw \\
 &= x' \vee x'w \vee y' \vee z \vee xw \\
 &= x' \vee y' \vee z \vee (x' \vee x)w \\
 &= x' \vee y' \vee z \vee w
 \end{aligned}$$



18

CONTOH 12

Fungsi mayoritas adalah rangkaian digital yang menghasilkan keluaran = 1, bila dan hanya bila mayoritas masukannya = 1. Jika tidak demikian, keluarannya = 0. Buatlah skema rangkaiannya untuk masukan x, y, z.

Penyelesaian

Untuk 3 masukan x, y, z, fungsi mayoritas akan memberikan keluaran = 1 bila dan hanya bila ada ≥ 2 masukan yang bernilai 1

x	y	z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

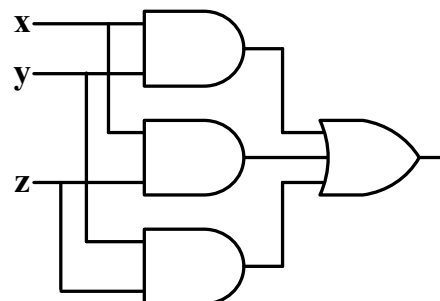
19

CONTOH 12

Bentuk DNF dari fungsi mayoritas adalah:

$$\begin{aligned}
 F &= xyz \vee xyz' \vee xy'z \vee x'yz \\
 &= (xyz \vee xyz' \vee xy'z) \vee x'yz \\
 &= (xyz \vee xy'z') \vee (xyz \vee xy'z) \vee (xyz \vee x'yz) \\
 &= xy(z \vee z') \vee xz(y \vee y') \vee yz(x \vee x') \\
 &= xy \vee xz \vee yz
 \end{aligned}$$

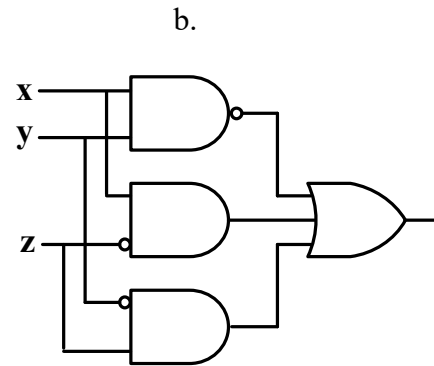
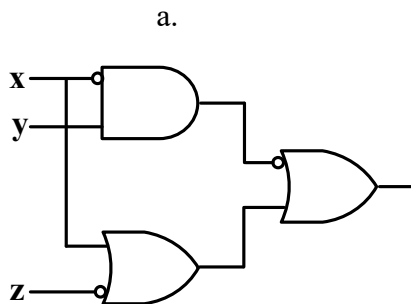
Rangkaian



20

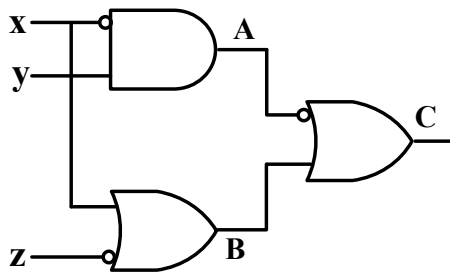
CONTOH 13

Susunlah ekspresi Boole dari gerbang-gerbang berikut, kemudian sederhanakan ekspresi Boole tersebut dengan memanfaatkan hukum-hukum logika serta gambarkan rangkaian dari ekspresi Boole yang telah disederhanakan tersebut.



21

CONTOH 13 → Penyelesaian a



Keluaran gerbang A $\rightarrow x'y$

Keluaran gerbang B $\rightarrow x \vee z'$

Keluaran gerbang C $\rightarrow (x'y)' \vee (x \vee z')$

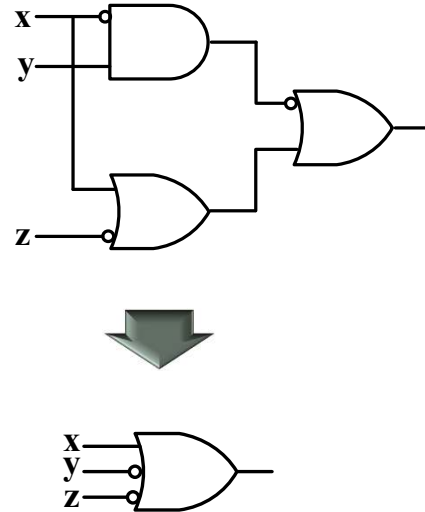
Dengan demikian ekspresi Boole yang sesuai adalah $(x'y)' \vee (x \vee z')$

22

CONTOH 13 → Penyelesaian a

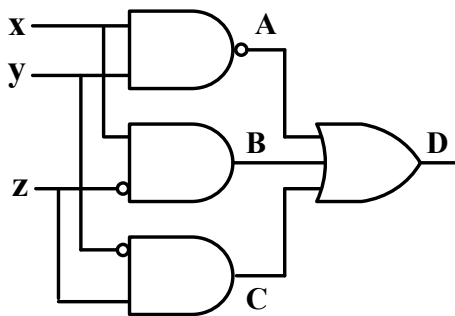
Penyederhanaan ekspresi Boole

$$\begin{aligned}
 (x'y)' \vee (x \vee z') &= ((x')' \vee y') \vee (x \vee z') \\
 &= (x \vee y') \vee (x \vee z') \\
 &= (x \vee x) \vee y' \vee z' \\
 &= x \vee y' \vee z'
 \end{aligned}$$



23

CONTOH 13 → Penyelesaian b



Keluaran gerbang A → $(xy)'$
 Keluaran gerbang B → xz'
 Keluaran gerbang C → $y'z$
 Keluaran gerbang D → $(xy)' \vee xz' \vee y'z$

Dengan demikian ekspresi Boole yang sesuai adalah $(xy)' \vee xz' \vee y'z$

24

CONTOH 13 → Penyelesaian b

Penyederhanaan ekspresi Boole

$$\begin{aligned}(xy)' \vee xz' \vee y'z &= (x' \vee y') \vee xz' \vee y'z \\&= x' \vee xz' \vee y' \vee y'z \\&= x'.1 \vee xz' \vee y'(1 \vee z) \\&= x'(z' \vee 1) \vee xz' \vee y'.1 \\&= x'z' \vee x' \vee xz' \vee y' \\&= x'z' \vee xz' \vee x' \vee y' \\&= (x' \vee x)z' \vee x' \vee y' \\&= z' \vee x' \vee y'\end{aligned}$$

