Teknik Pengolahan Sinyal

KONVOLUSI

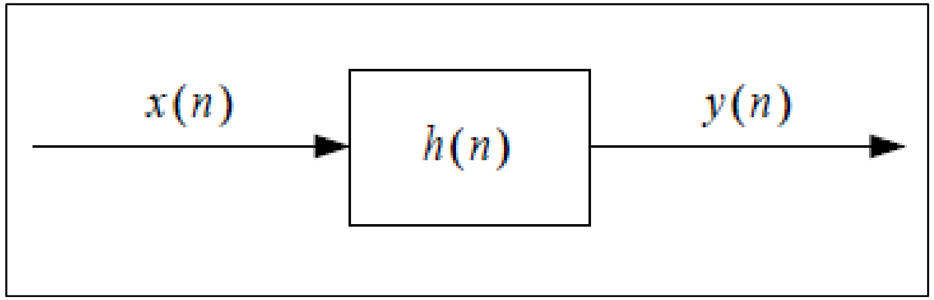
Aqil Aqthobirrobbany, S.T., M.Eng.

Tujuan Pembelajaran

1. Menjelaskan tentang apa dan bagaimana sistem konvolusi itu.
2. Menjelaskan tentang fungsi penjumlahan konvolusi.
3. Menyebutkan dan menjelaskan langkah-langkah konvolusi.
4. Menjelaskan tentang sifat konvolusi pada sistem LTI.
5. Menjelaskan interkoneksi sistem LTI.

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Konvolusi adalah satu cara matematis untuk mengombinasikan dua sinyal LTI untuk membentuk sinyal baru. Dengan menggunakan konvolusi kita akan memperoleh respons sistem berdasarkan masukan yang diterimanya.



Gambar 1. Konvolusi pada Sistem Linear

Sinyal masukan $x(n)$ masuk ke dalam sistem linear yang mempunyai tanggapan impuls $h(n)$ sehingga menghasilkan sinyal keluaran $y(n)$. Blok diagram sistem ditunjukkan pada Gambar 1 dan dinyatakan dengan persamaan (1) sampai dengan (6) [John dan Dimitri: 1995]. Untuk mempermudah, notasi tanda bintang (*) digunakan untuk menunjukkan operasi konvolusi.

$$y(n) = x(n) * h(n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

$$y(n) = x(n) * h(n) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

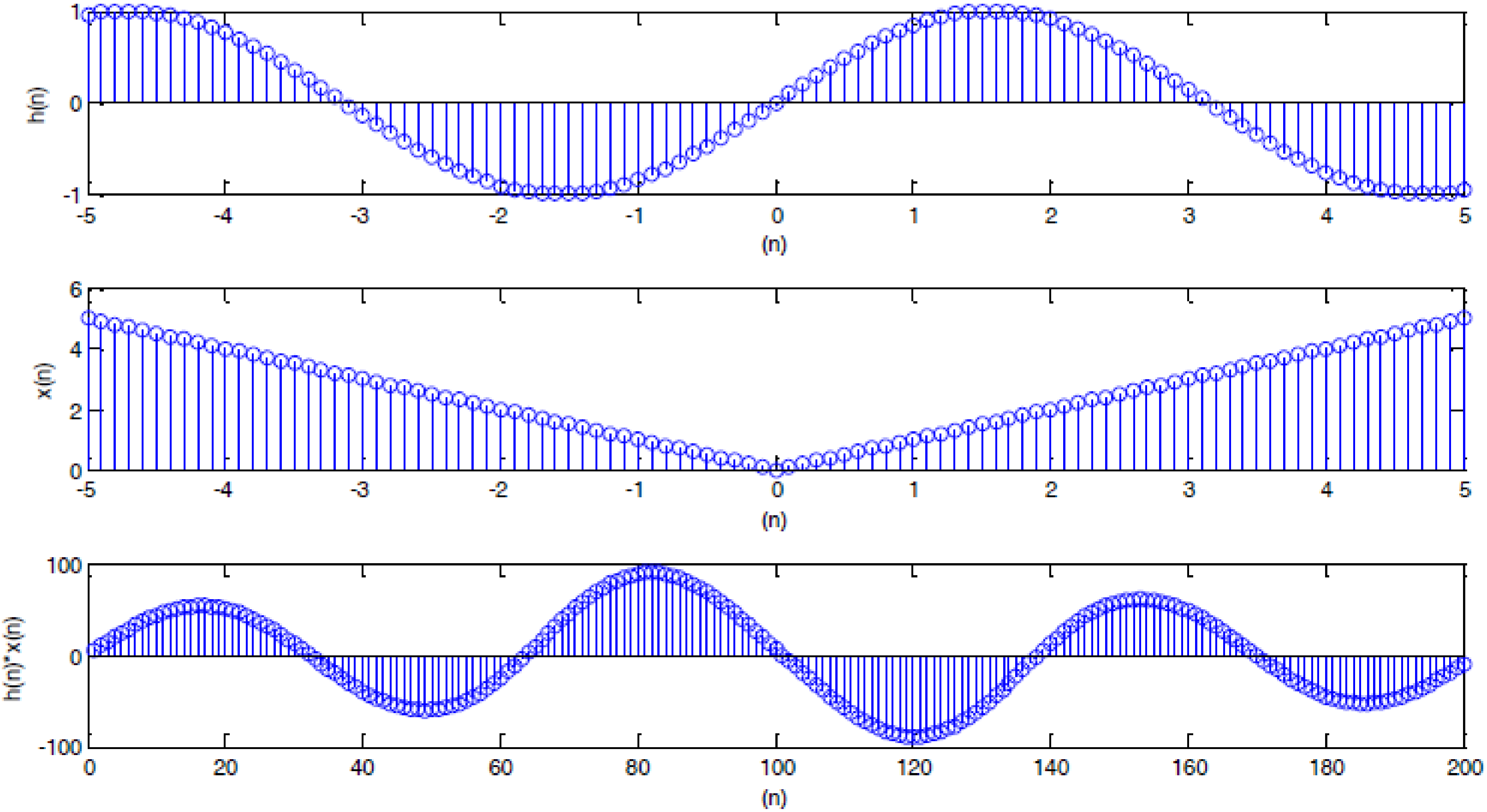
Pertama-tama, respons keluaran $y(n,k)$ dari sistem terhadap barisan masukan sinyal cuplikan unit pada $n = k$ kita definisikan sebagai $h(n,k)$

$$y(n,k) \equiv h(n,k) = T[\delta(n-k)] \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Resolusi sinyal waktu diskrit menjadi impuls dinyatakan dalam persamaan,

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit



Gambar 2. Contoh Hasil Konvolusi Dua Sinyal Diskrit

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Maka respons sistem terhadap x(n) adalah,

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]\right]$$

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Respons sistem LTI terhadap deret cuplikan unit $\delta(n)$ adalah h(n),

$$h(n) = T[\delta(n)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Jika sifat LTI adalah invarian-waktu, maka respons sistem terhadap tunda deret cuplikan unit $\delta(n-k)$ adalah,

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$
$$= [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]]$$
$$= [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Konsekuensinya, persamaan (4) menjadi,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(7)$$

Anggaplah bahwa kita ingin menghitung keluaran sistem pada waktu sesaat, $n = n_0$. Sesuai dengan persamaan (7), respons di $n = n_0$ adalah,

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(8)$$

Analisa pengamatan:

- Pengamatan pertama kita adalah bahwa indeks penjumlahannya adalah k, dan karena itu sinyal masukannya adalah $x(k)$ dan keluarannya adalah respon impuls $h(n_0 - k)$.
- Kedua, kita perhatikan bahwa deret $x(k)$ dan $h(n_0 - k)$ dikalikan bersama untuk membentuk deret produk (hasil perkalian deret).

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

- Barisan $\mathrm{y}(n_0)$ adalah penjumlahan sederhana melalui seluruh nilai deret produk $h(n_0 - k)$.
- $h(n_0 - k)$ diperoleh dari pencerminan $h(k)$ yang digeser sejauh n_0 ke kanan/kiri jika n_0 positif/negatif.

Secara ringkas proses penghitungan konvolusi antara $x(k)$ dan $h(k)$ melibatkan empat langkah:

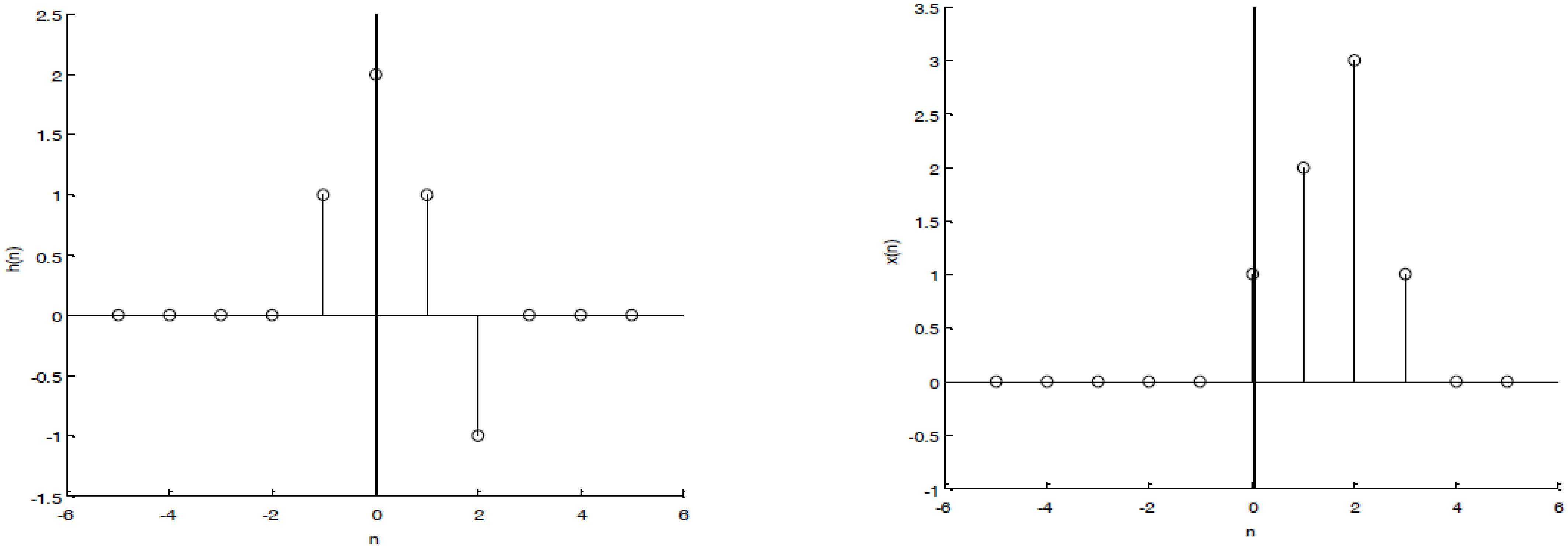
1. **Pencerminan (*Folding*)**. Cerminkan $h(k)$ pada $k = 0$ untuk memperoleh $h(-k)$
2. **Pergeseran (*Shifting*)**. Geser $h(-k)$ sejauh n_0 ke kanan / kiri jika n_0 positif / negatif untuk memperoleh $h(n_0 - k)$.
3. **Perkalian (*Multiplication*)**. Kalikan $x(k)$ dengan $h(n_0 - k)$ untuk memperoleh deret produk,

$$v_{n_0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

4. **Penjumlahan (Summation).** Jumlahkan seluruh nilai deret produk $v_{n_0}(k)$ untuk memperoleh nilai keluaran pada waktu $n = n_0$.

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Contoh 1 Respons impuls $h(n)$ dari suatu sistem LTI seperti yang ditunjukkan Gambar 3(a). Tentukan respons sistem terhadap terhadap sinyal masukan $x(n)$ seperti yang ditunjukkan Gambar 3(b).



(a) (b)

Gambar 3 (a) Respons impuls h(n) (b) Sinyal masukan x(n)

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Penyelesaian

Kita akan menghitung konvolusi sesuai dengan rumus 9, tetapi kita juga akan membuat grafik deretnya. Gambar 4(a) dan 4(b) mengilustrasikan respons impuls dan sinyal masukan $x(k)$ dari sistem. Indeks k digunakan agar sesuai dengan persamaan (9)

Langkah pertama dalam komputasi jumlah konvolusi Adalah mencerminkan $h(k)$. Deret pencerminan $h(k)$ diilustrasikan pada gambar 4(c). Sekarang kita dapat menghitung keluaran di $n = 0$, sesuai dengan persamaan (7) dan (8), ditunjukkan pada gambar 4(d).

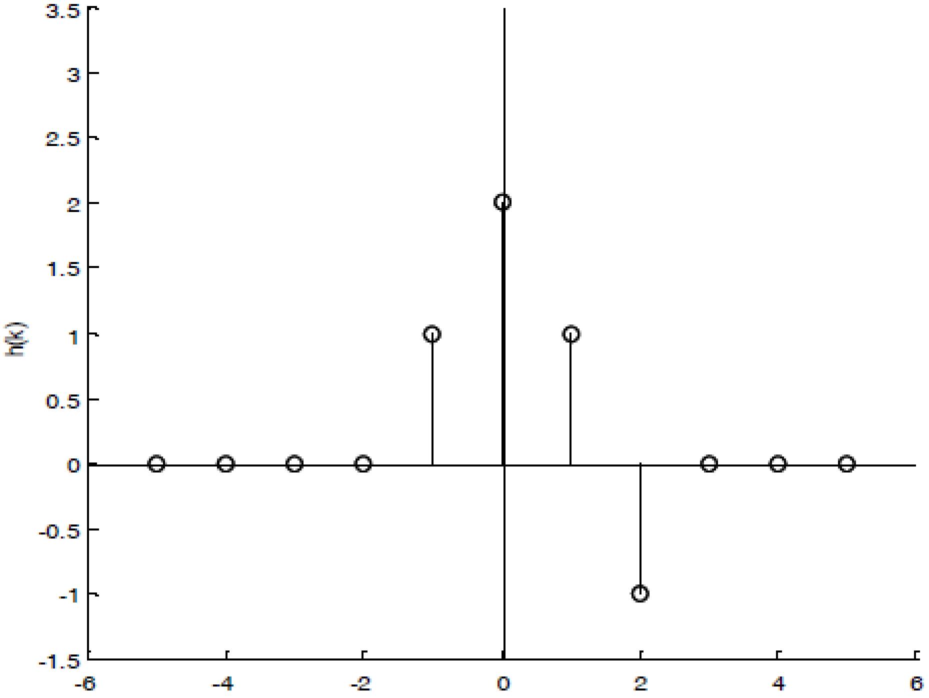
$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(-k)$$

Dari persamaan (9), maka deret produk,

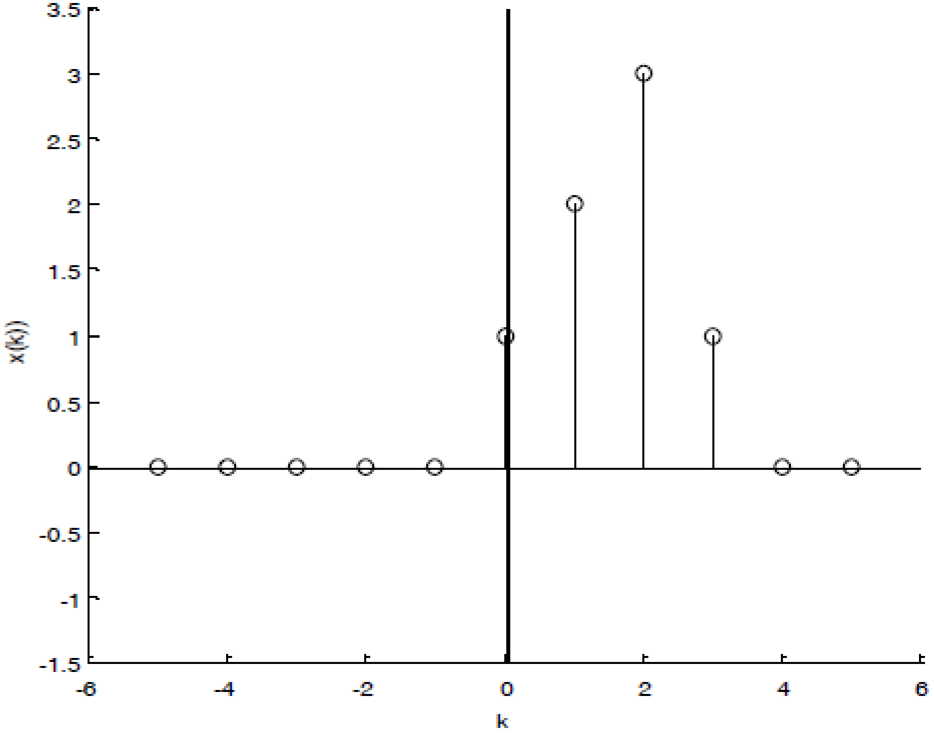
$$y(0) = x(k)h(-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0 k = 4$$

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit



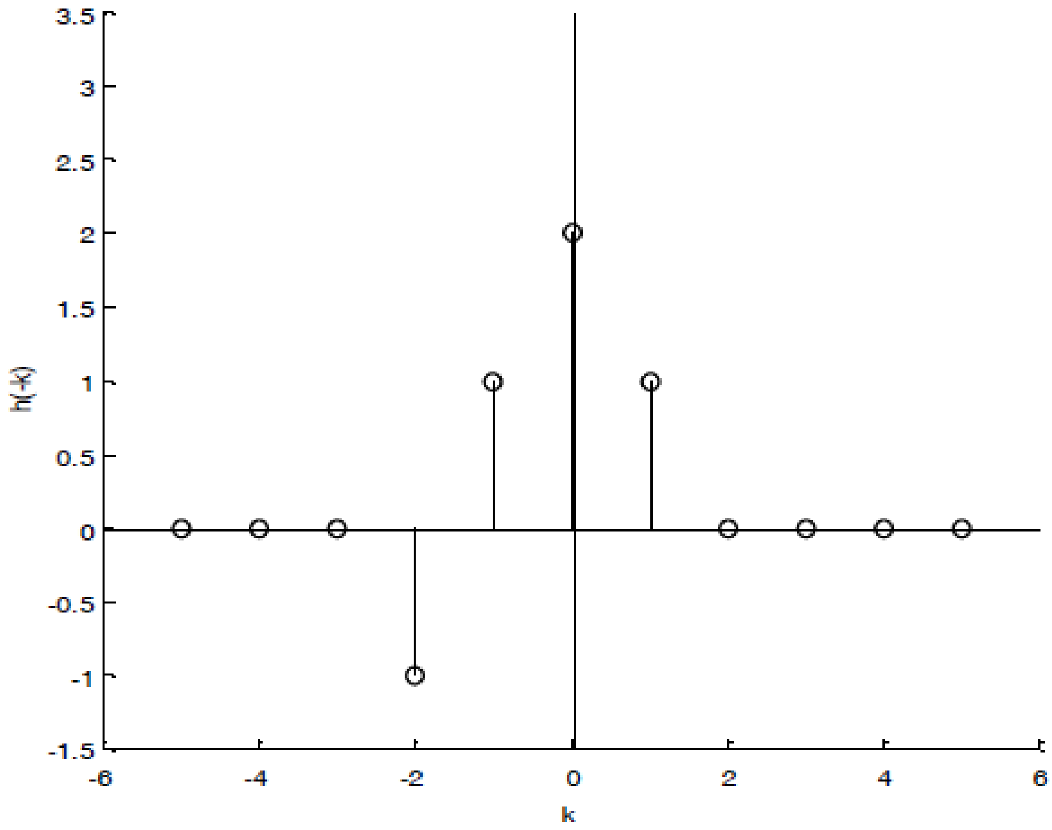
(a)



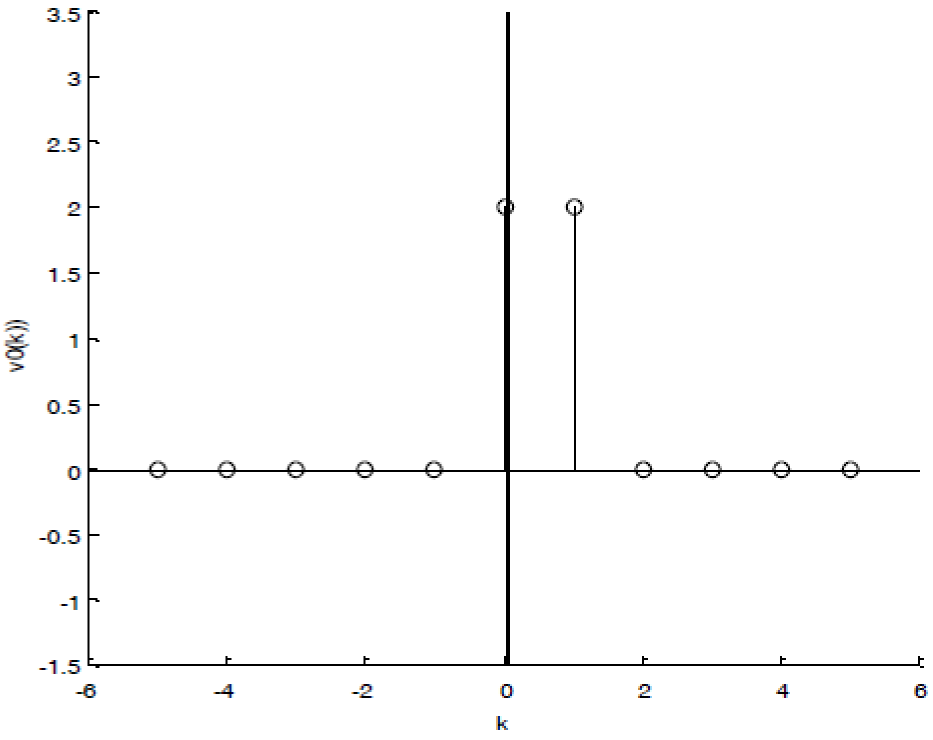
(b)

Gambar 4. Perhitungan Grafis Konvolusi (a) Respons impuls h(k) (b) Sinyal masukan x(k)

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit



(c)



(d)

Gambar 4. Perhitungan Grafis Konvolusi (c) Respons impuls h(-k) (d) $v_0 k$ sehingga y(0)=4

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Dari persamaan (9), maka deret produk,

$$y(0) = x(k)h(-k)$$

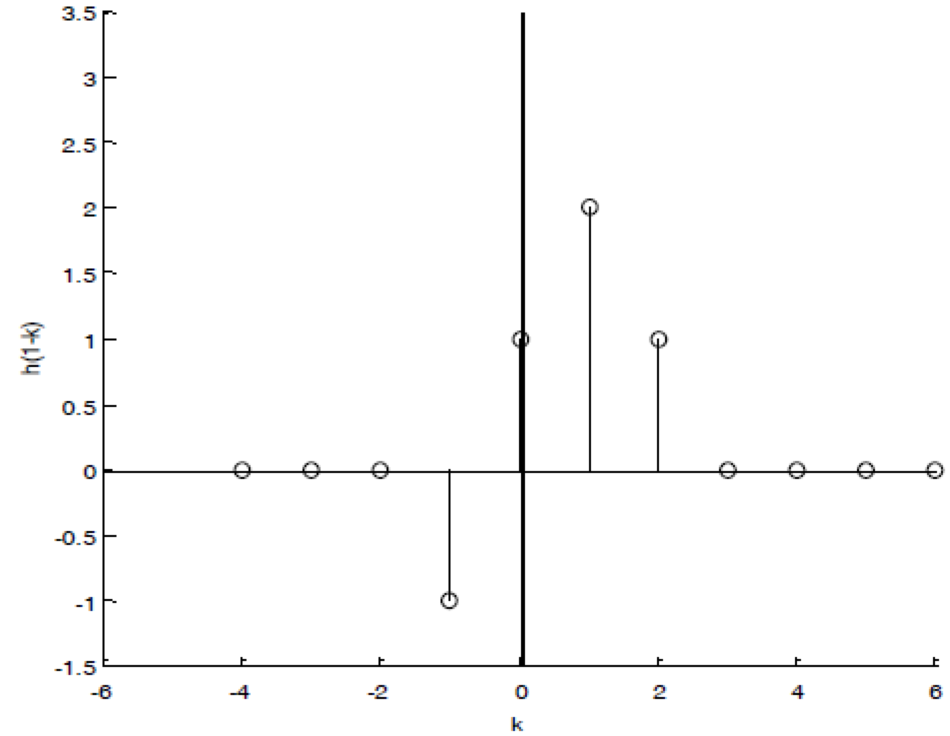
$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0 k = 4$$

Kita lanjutkan komputasi dengan mengevaluasi respons sistem di $n = 1$.

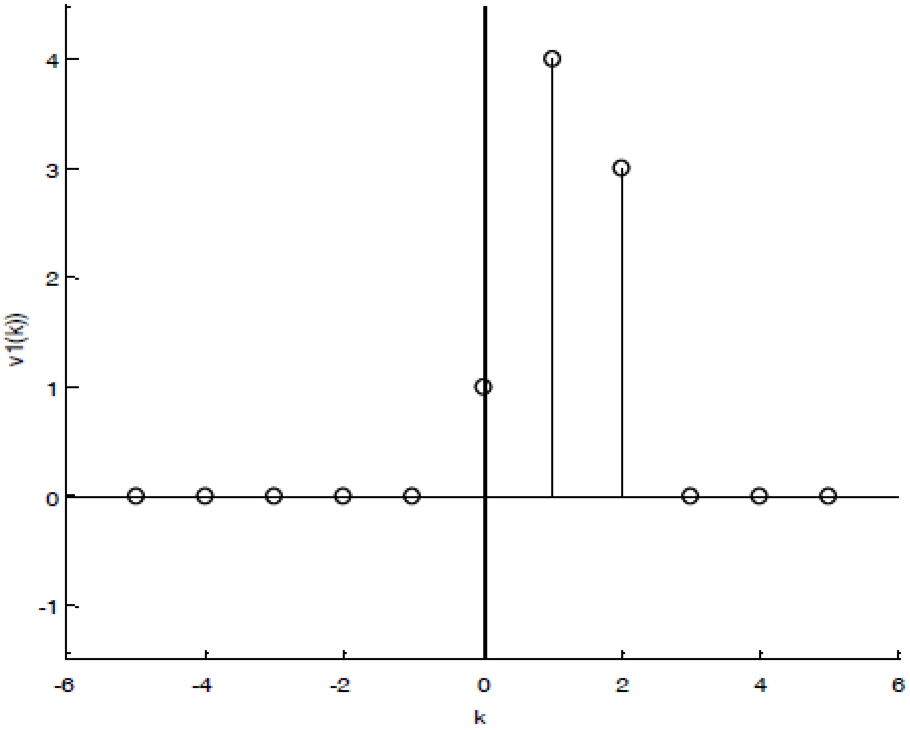
$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(1-k)$$

Deret $h(1-k)$ adalah pencerminan deret $h(-k)$ (gambar 4(c)) yang digeser ke kanan menurut satu satuan waktu. Deret ini ditampilkan pada gambar 5(a). Deret produk, $v_1(k) \equiv x(k)h(1-k)$, diilustrasikan pada gambar 5(b). Akhirnya, jumlah seluruh nilai dalam produk menghasilkan, $y(1) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1 k = 8$

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit



(a)

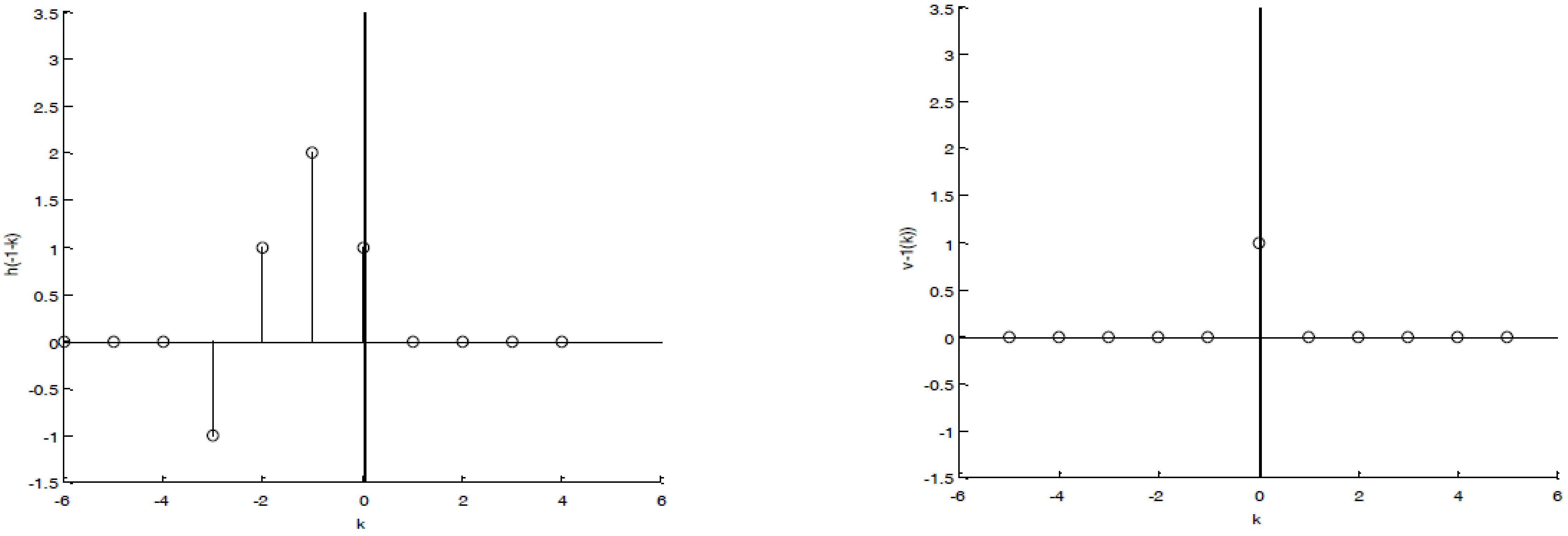


(b)

Gambar 5. Perhitungan Grafis Konvolusi (a) Respons impuls h(1-k) (b) $v_1 k$ sehingga y(1)=8

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

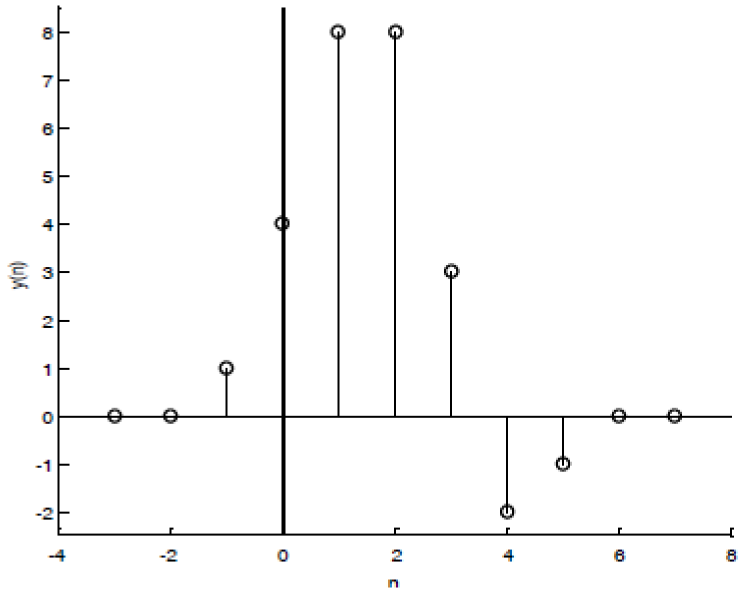
Dengan cara yang sama, kita memperoleh $y(2)$ dengan menggeser $h(-k)$ dua satuan ke kanan yang membentuk deret produk $v_2(k) \equiv x(k)h(2-k)$. Akhirnya, kita memperoleh $y(3) = 3; y(4) = -2; y(5) = -1, dst$. Untuk $n > 5$, $y(n) = 0$, karena deret produk seluruhnya berisi nol.



(a) (b)

Gambar 6. Perhitungan Grafis Konvolusi (a) Respons impuls h(-1-k) (b) $v_{-1}k$ sehingga y(-1) = 1

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit



Gambar 7. Hasil Komputasi Grafis Konvolusi Contoh

Berikutnya untuk $n < 0$, kita evaluasi dengan cara yang sama. Akhirnya kita mempunyai respons sistem seluruhnya untuk $-\infty < n < \infty$, yaitu,

$$y(n) = \{\dots, 0,0,1,\underset{\uparrow}{4},8,3,-2,-1,0,0,\dots\} \qquad \text{10}$$

Secara grafis, ditunjukkan pada gambar 7.

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Selain perhitungan secara grafis, cara lain yang dapat digunakan untuk menghitung konvolusi adalah dengan menggunakan tabel matriks. Perhitungan konvolusi $x(n) * h(n)$ dilakukan dengan menempatkan setiap nilai $h(n)$ di kolom paling kiri dan setiap nilai $x(n)$ pada baris paling atas, pada setiap nilai n yang bersesuaian. Nilai $y(n)$ didapat dengan menjumlahkan diagonal $h(n)x(n)$.

Matriks konvolusi dapat mempercepat proses perhitungan algoritma, terutama jika perhitungan dilakukan manual, tidak menggunakan bantuan pemrograman. Akan tetapi, permasalahan akan muncul apabila sinyal tidak dimulai dari n = 0. Seperti pada contoh 1, dimana respon impuls h(n) dimulai pada n = -1. Matriks konvolusi tetap bisa digunakan, hanya saja kita harus lebih teliti untuk menentukan nilai n untuk y(n). Terlebih dahulu kita periksa beberapa hasil dengan perhitungan biasa sesuai persamaan 8 dan 9, missal pada n = 0, untuk menghitung y(0).

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Tabel 1 Tabel Matriks Operasi Konvolusi

$h(n)/x(n)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	…
$h(0)$	$h(0)\,x(0)$	$h(0)\,x(1)$	$h(0)\,x(2)$	…
$h(1)$	$h(1)\,x(0)$	$h(1)\,x(1)$	$h(1)\,x(2)$	…
$h(2)$	$h(2)\,x(0)$	$h(2\,x(1)$	$h(2)\,x(2)$	…
$h(3)$	$h(3)\,x(0)$	$h(3)\,x(1)$	$h(3)\,x(2)$	
…	…	…	…	…

Tabel 2 Tabel Perhitungan Matriks Konvolusi

n	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$
0	$y(0) = h(0)x(0)$
1	$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$
2	$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$
3	$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$
…	…

Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Pada contoh 1, tabel matriks yang didapat ditunjukkan pada tabel 3. Perhatikan bahwa hasil perhitungan jumlah diagonal Adalah y(n) = {0,1,4,8,8,3,-2,-1,0}, bersesuaian dengan hasil yang ditunjukkan pada gambar 7. Akan tetapi hasil tersebut belum menunjukkan setiap nilai adalah untuk n yang mana. Kita bisa menghitung terlebih dahulu hasil konvolusi pada n = 0 yaitu y(0) = 4, sehingga selanjutnya kita bisa menetapkan bahwa, y(-2)= 0, y(-1)= 1, y(0) = 4, y(1)= 8, dan seterusnya.

Tabel 3 Tabel Matriks Operasi Konvolusi

$h(n)/x(n)$	0	1	2	3	1
1	0	1	2	3	1
2	0	2	4	6	2
1	0	1	2	3	1
-1	0	-1	-2	-3	-1
0	0	0	0	0	0