Teknik Pengolahan Sinyal

Transformasi Fourier untuk Sinyal Waktu Non-Periodik

Aqil Aqthobirrobbany, S.T., M.Eng.

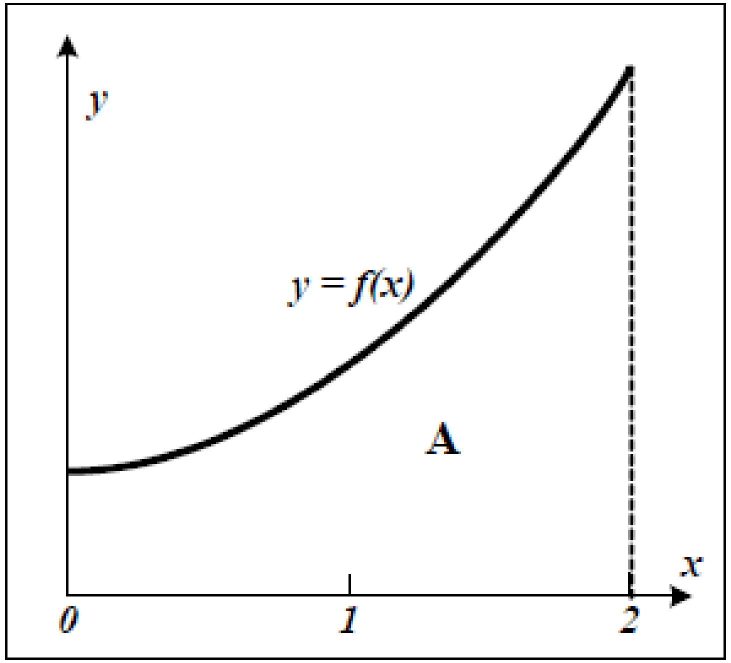
Tujuan Pembelajaran

1. Memahami dan menjelaskan tentang konsep luasan untuk integral dan sigma ($\sum$)
2. Memahami dan menjelaskan definisi Transformasi Fourier
3. Memahami dan menjelaskan Sifat-sifat Transformasi Fourier
4. Memahami dan menjelaskan tentang fungsi impuls, fungsi signum, dan fungsi step.

Konsep Luasan untuk Integral dan Sigma (∑)

Jika kurva $y = f(x)$ pada Gambar 1 dalam selang $0 \leq x \leq 2$ dibagi menjadi n bagian sehingga:

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n$$



Gambar 1. $y = f(x)$

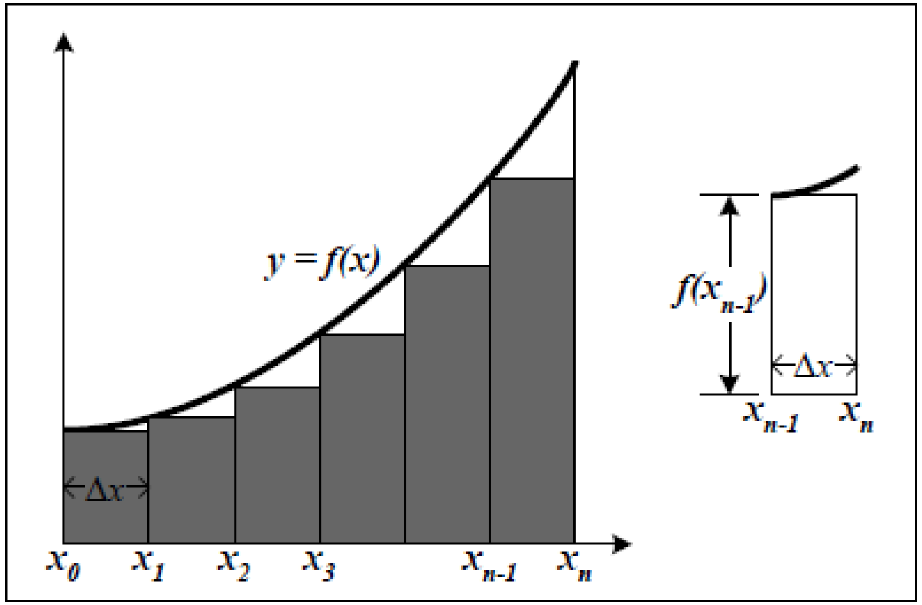
maka panjang Δx Adalah: $2/n$. Luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada Gambar 2 adalah jumlah dari luas setiap siku empat. Luas setiap siku empat tersebut adalah: $f(x_{n-1})\Delta x$. Jika luasan total adalah L, maka

$$\begin{aligned} L &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots.. + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \Delta x[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots.. + f(x_{n-1})] \\ &= \frac{2}{n}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots.. + f(x_{n-1})] \end{aligned}$$

Atau:

$$L = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Konsep Luasan untuk Integral dan Sigma (∑)



Gambar 2. Luasan di bawah kurva $y = f(x)$

Jika $n \to \sim$, maka:

$$L = \lim_{n \to \sim} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Jika $n \to \sim$, dan $\Delta x = 2/n$, maka $\Delta x \to 0$. Sehingga:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Dan kita tahu bahwa, Jika $y = f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$:

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

Maka:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

Definisi Transformasi Fourier

Jika suatu fungsi f(t) tak berulang tapi terdefinisikan pada suatu selang tak hingga (mis: $y = x^2$), maka fungsi tersebut tidak dapat diuraikan atas deret Fourier. Tetapi masih dimungkinkan untuk menganggap fungsi tersebut berulang dengan perioda tak hingga dan hasil-hasil pembahasan sebelum ini dapat diperluas untuk hal tersebut (untuk T → ~).

Kita tulis kembali persamaan, bentuk ekponensial dari deret Forier:

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{jn\omega_0 t}\, C_n$$

Dimana,

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Definisi Transformasi Fourier

Jika kita ambil $t_0 = -T/2$ maka $t_0 + T = T/2$

Untuk $T \to \sim$, maka $-T/2 \to -\sim$ dan $T/2 \to \sim$, sehingga:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\sim}^{\sim} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$C_n T = \int_{-\sim}^{\sim} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Dan

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definisi Transformasi Fourier

Jika $T \rightarrow \sim$, maka $\omega_0 \rightarrow 0$, sehingga ω_0 menjadi sangat kecil atau limit ω_0 mendekati 0.

Kita nyatakan limit ini sebagai diferensial:

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

Jika $\omega_0 \rightarrow 0$, maka fungsi tidak kontinyu (konsep kontinyu artinya tak berhingga). Supaya fungsi tetap kontinu maka $n \rightarrow \sim$, sehingga:

$$n\omega_0 \rightarrow \omega$$

Maka:

$$C_n T = \int_{-\sim}^{\sim} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Definisi Transformasi Fourier

Karena proses limit hanya melibatkan fungsi frekuensi (T dan ω) dan tidak melibatkan fungsi waktu t, maka ruas kanan persamaan diatas adalah fungsi frekuensi juga. Atau $C_n T = F(j\omega)$, sehingga:

$$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt}$$

Bisa ditulis sebagai:

$$\boxed{\Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt}$$

Definisi Transformasi Fourier

Tulis kembali persamaan :

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{jn\omega_0 t} c_n$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \times \tfrac{1}{T} \qquad \rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \times \tfrac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \, d\omega$$

Terapkan proses limit pada persamaan diatas, sesuai dengan persamaan &.5 dengan $\omega_0 \rightarrow 0$

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \, d\omega$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \, d\omega$$

$$\boxed{f(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} F(j\omega) \, d\omega}$$

Definisi Transformasi Fourier

Persamaan (7.12) dan (7.15) dinamakan **Pasangan Transformasi Fourier**. Fungsi $F(j\omega)$ adalah trasformasi Fourier dari f(t), dan f(t) adalah trasformasi Fourier invers dari $F(j\omega)$.

Trasformasi Fourier invers dari $F(j\omega)$ bisa ditulis sebagai:

$$\boxed{\Im^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega)\, d\omega}$$

Hubungan pasangan transformasi persamaan (7.12) dan (7.15) adalah yang paling penting! Pentingnya hubungan ini kita tekankan dengan mengulangi dan menempatkan dalam sebuah kotak:

$$\boxed{\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega)\, d\omega \end{aligned}}$$

Pasangan transformasi tersebut biasa ditulis sebagai:

$$\boxed{f(t) \leftrightarrow F(j\omega)}$$

Sifat-sifat Transformasi Fourier

Dengan menggunakan definisi:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \qquad (7.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \rightarrow t = 0$$

Sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0) \qquad (7.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \quad \rightarrow t = t_0$$

Sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0) \qquad (7.21)$$

Contoh 7.1:

Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = \delta(t)$

Penyelesaian contoh 7.1:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\rightarrow$ sesuai dengan persamaan (7.20), $g(t) = e^{-j\omega t}$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)dt \\ &= g(0) \\ &= e^{-j\omega 0} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Atau menurut penulisan persamaan (7.18):

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

(Transformasi Fourier dari δ(t) adalah 1)

$\boxed{k\delta(t) \leftrightarrow k}$, k adalah konstanta

Sifat-sifat Transformasi Fourier

Contoh 7.2:

Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = \delta(t - t_0)$

Penyelesaian contoh 7.2:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$\rightarrow$ sesuai dengan persamaan (7.20), $g(t) = e^{-j\omega t}$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - t_0) dt$$

$$= g(t_0)$$

$$= e^{-j\omega t_0}$$

Atau:

$$\boxed{\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}}$$

Contoh 7.3:

Tentukan transformasi Fourier dari $F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$

Penyelesaian contoh 7.3:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega$$

$\rightarrow$ sesuaidengansifat 2) dimana $g(t) = e^{j\omega t}$ dan $t = \omega_0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} g(\omega_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

Atau:

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)} \qquad (7.25)$$

Dan dengan mengganti ω_0 dengan $-\omega_0$, maka:

$$\boxed{e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)} \qquad (7.26)$$

Jika $\omega_0 = 0$, maka:

$$e^{-j0t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + 0)$$

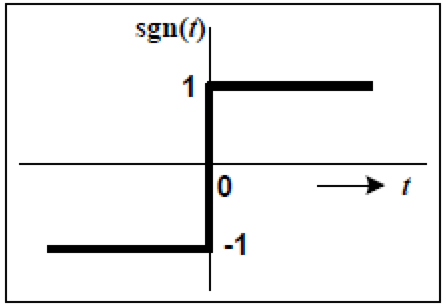
$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)} \qquad (7.27)$$

Sifat-sifat Transformasi Fourier

7.4.2. Fungsi Signum [sgn(t)]

Definisi :

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad (7.28)$$



Gambar 7.3 Fungsi Signum

Atau

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)} \qquad (7.29)$$

Contoh 7.4:

Tentukan transformasi Fourier dari,

$\operatorname{sgn}(t) = e^{-at}[u(t) - u(-t)]$, $a \to 0$

Penyelesaian contoh 7.4:

$$\begin{aligned}
\Im[\operatorname{sgn}(t)] &= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}[u(t) - u(-t)] e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at} u(t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at} u(-t)\, dt \\
&= \lim_{a\to 0} \left[\int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at}\, dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega t} e^{-at}\, dt \right] \\
&= \lim_{a\to 0} \left[\int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+a)t}\, dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-(j\omega+a)t}\, dt \right] \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left[\frac{-1}{j\omega+a} e^{-(j\omega+a)t} \right]_{0}^{\infty} - \left[\frac{-1}{j\omega+a} e^{-(j\omega+a)t} \right]_{-\infty}^{0} \right) \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left| \frac{-1}{(j\omega+a)e^{(j\omega+a)t}} \right|_{0}^{\infty} - \left| \frac{-1}{(j\omega+a)e^{(j\omega+a)t}} \right|_{-\infty}^{0} \right) \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left[\frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{j\omega+a} \right] - \left[\frac{-1}{j\omega+a} - \frac{-1}{\infty} \right] \right) \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left[0 + \frac{1}{j\omega+a} \right] - \left[\frac{-1}{j\omega+a} - 0 \right] \right) \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{2}{j\omega+a} \\
&= \frac{2}{j\omega}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}} \quad \text{atau} \quad \boxed{u(t) - u(-t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}} \qquad (7.30)$$

Sifat-sifat Transformasi Fourier

7.4.3. Fungsi Step $[u(t)]$

Jika:

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) \qquad (7.31)$$

Dengan menggunakan persamaan (6.27) dan (6.29), maka:

$$\begin{aligned}
\Im[u(t)] &= \Im[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)] \\
&= \Im[\tfrac{1}{2}] + \Im[\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)] \\
&= \tfrac{1}{2}2\pi\delta(\omega) + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{j\omega} \\
&= \pi\delta(\omega) + \tfrac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \tfrac{1}{j\omega}} \qquad (7.32)$$

Tabel 7.1 Pasangan Transformasi Fourier yang Umum Dikenal

(Digunakan sebagai dasar perhitungan untuk transformasi fungsi yang lain)

f(t)	$\Im\{f(t)\} = F(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
kf(t) → (k = konstanta)	kF(jω)
$\operatorname{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$
u(t)	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$

Perhitungan transformasi Fourier biasanya sudah tidak menggunakan persamaan 7.17.a dan 7.17.b. Beberapa persamaan dasar sudah disusun dalam tabel 7.1 sesuai dengan analisis Fourier pada contoh 7.1 sampai dengan 7.4 di atas.