



Teknik Pengolahan Sinyal

Konsep Frekuensi dalam Sinyal

Aqil Aqthobirrobbany, S.T., M.Eng.



Tujuan pembelajaran



- Memahami konsep dasar frekuensi dalam sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit
- Menjelaskan definisi frekuensi, perioda, frekuensi sudut, amplitudo dan fase dalam sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.
- Menyebutkan sifat-sifat sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Semua sinyal dalam pengolahan sinyal dapat didekati dengan model dasar sinyal sinus

1. Suatu sinyal sinusoida analog/kontinu dapat dinyatakan dengan persamaan matematik:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \theta) \text{ atau } X(t) = A \sin(2\pi f t + \theta)$$

$\omega = 2\pi f$ *frekuensi*

Dimana:

$X(t)$ = Sinyal Analog

A = Amplitudo

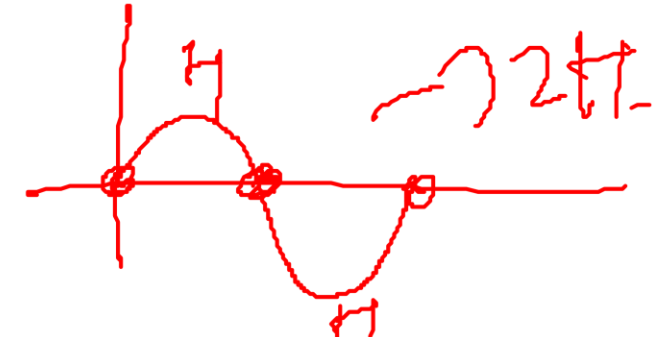
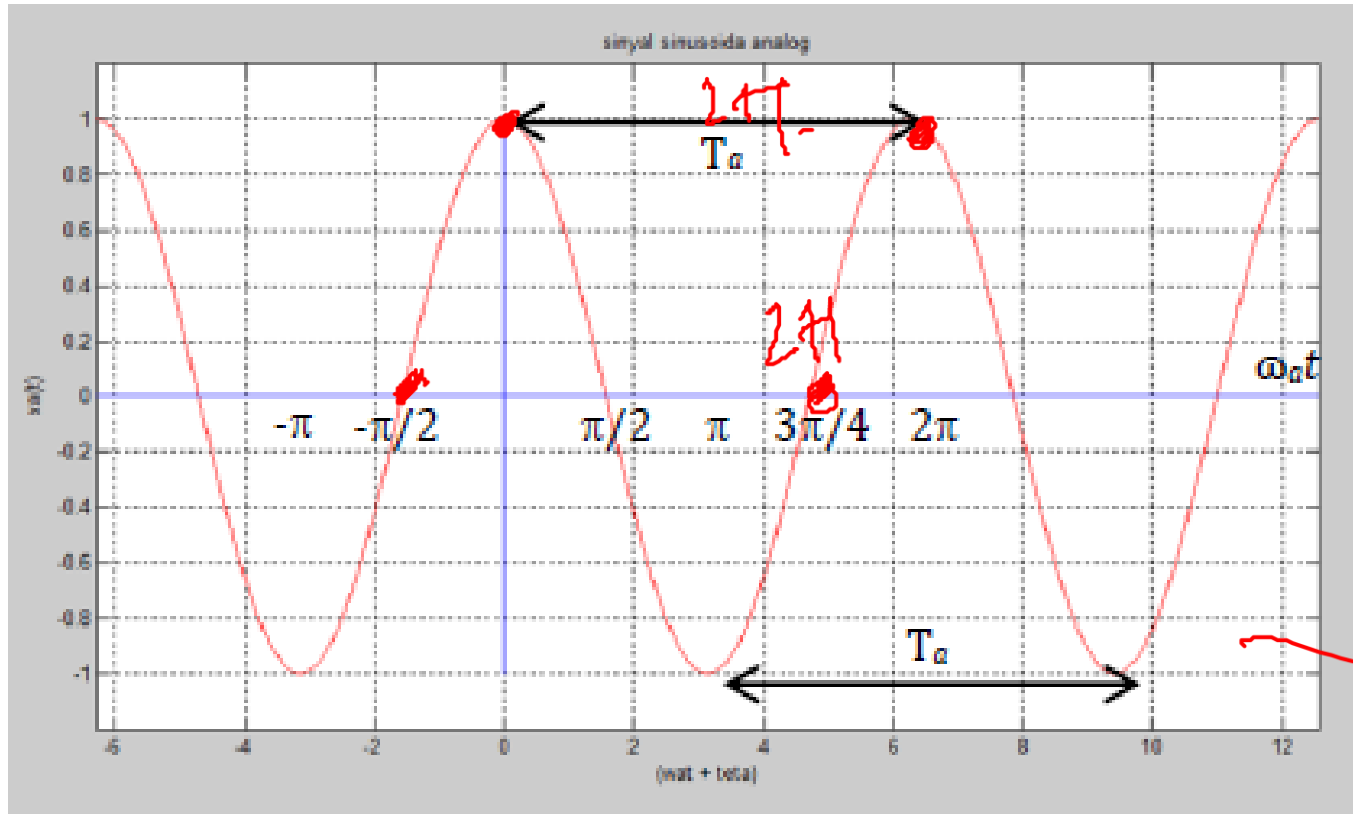
ω = frekuensi sudut (rad/det)

θ = fase (rad/detik)

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Bentuk sinyal dapat dilihat pada gambar berikut:



Dari Gambar 1 dapat dilihat fungsi berulang setiap 2π radian, sehingga dikatakan perioda $T_a = 2\pi$

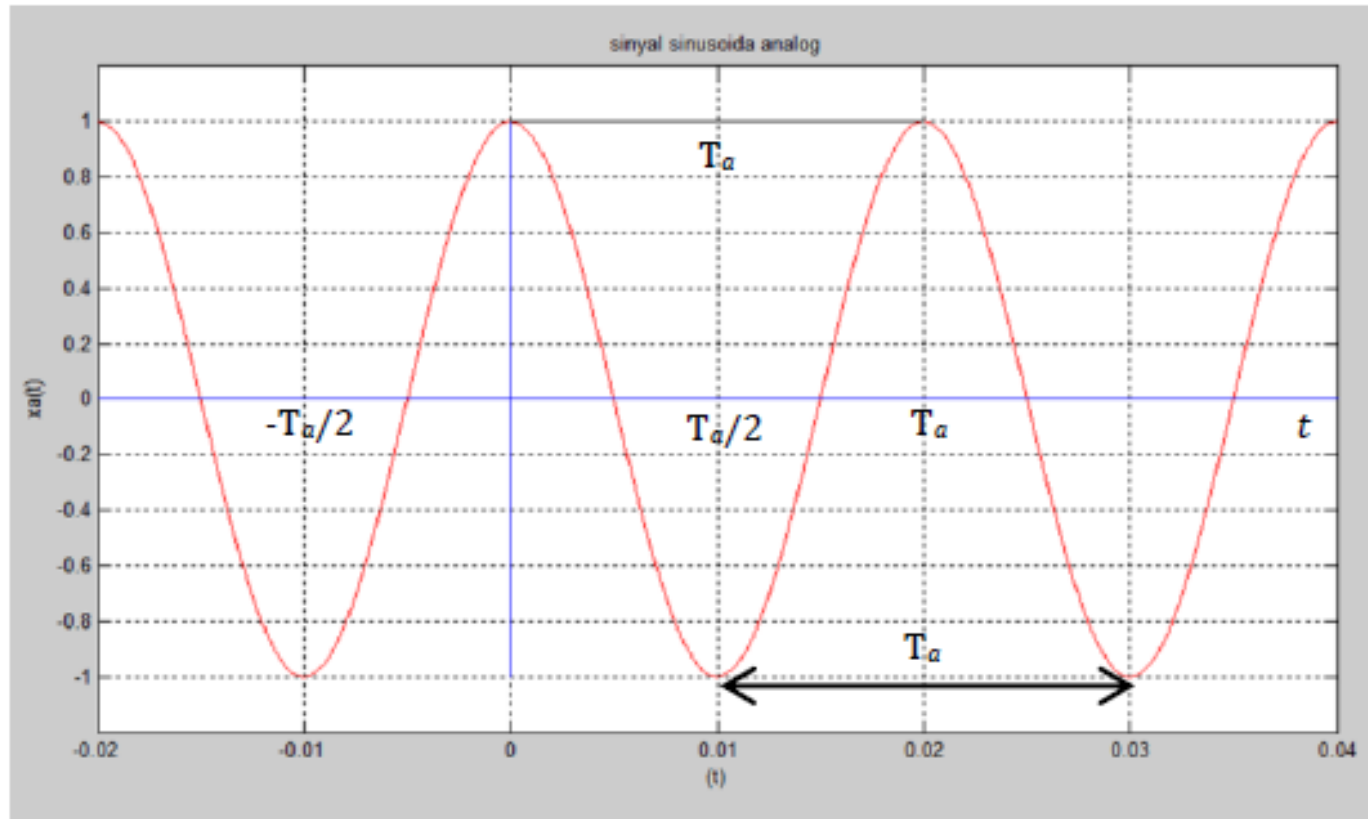
$T_a = 2\pi$

Gambar 1. Fungsi Sinusoida $X(t)$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Bentuk sinyal dapat dilihat pada gambar berikut:



Dari Gambar 2 fungsi $X(t)$ Digambar terhadap t , sehingga periodanya adalah $T_a = t$

Gambar 2. Fungsi Sinusoida $X(t)$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



T adalah perioda dalam satuan detik, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh sinyal analog untuk bergetar/merambat sebanyak satu kali atau sebanyak satu putaran

f_a adalah dalam satuan hertz (Hz), yaitu jumlah getaran atau putaran yang dihasilkan gelombang analog dalam waktu 1 detik

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Dari definisi di atas, maka:

$$f_a = \frac{1}{T_a} \quad (2.2)$$

Lihat kembali gambar 2.1 dan 2.2. Untuk $\omega_a t = 2\pi$, dimana $t = T_a$, maka:

$$\omega_a T_a = 2\pi \rightarrow \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi f_a$$

$$\omega_a T_a = 2\pi \quad f = \frac{1}{T_a} \quad (2.3)$$

$$\omega_a T_a = 2\pi$$
$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$$
$$f = \frac{1}{T_a}$$
$$f_a$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

$$X(t) = A \sin \omega t + \theta$$

$$X(t) = 5 \sin 4\pi t$$

Adaptif, Kreatif, Inovatif

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-diskrit



2. Suatu sinyal sinusoida waktu-diskrit dapat dinyatakan sebagai:

$$X(n) = A \cos(\omega_d n + \theta)$$

X_t : Sinyal kontinu
 X_n : -1- diskrit.

Dimana:

n = Suatu variable integer

A = Amplitudo

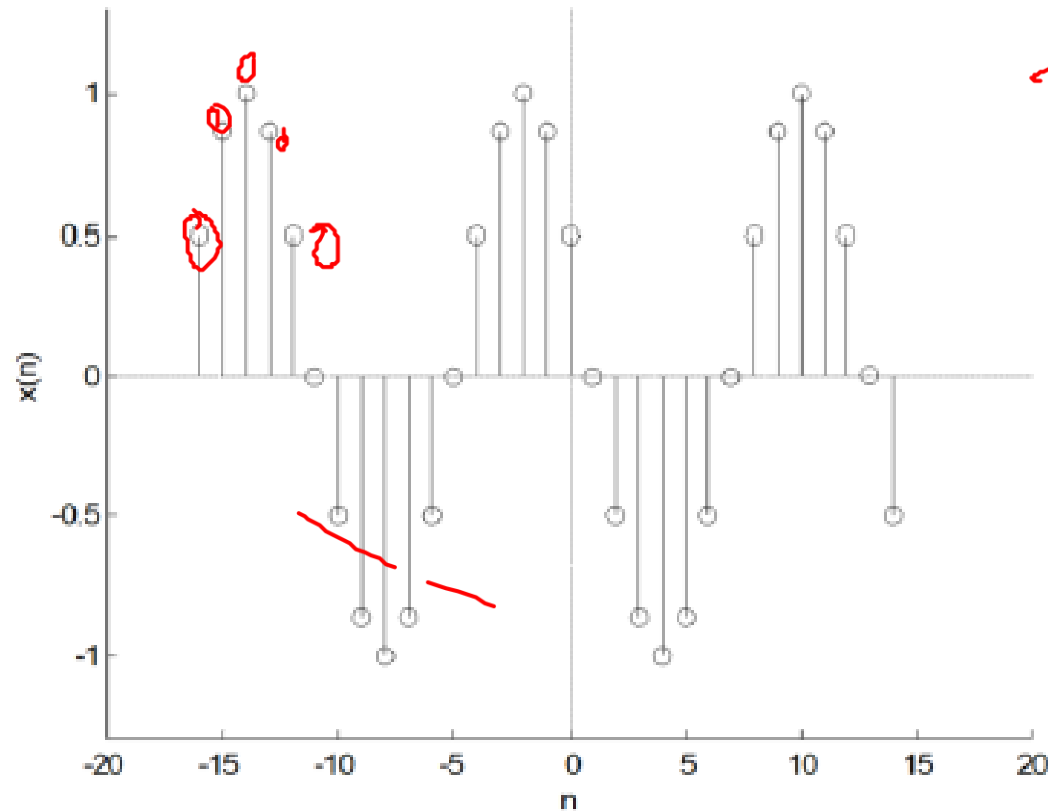
ω_d = frekuensi sudut sinyal diskrit

θ = fase dalam radian

~~$= 2\pi f_d$~~

$\frac{2\pi}{T_d}$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-diskrit



$$\omega = 2\pi f$$
$$f = \frac{1}{T_s}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T_s}$$

N adalah perioda dalam satuan detik, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh sinyal diskrit untuk bergetar/merambat sebanyak satu cuplikan

f_d adalah Frekuensi dalam satuan hertz (Hz), yaitu jumlah cuplikan yang dihasilkan sinyal diskrit dalam waktu 1 detik



Gambar 4. Contoh Sinyal Sinusoida Waktu Diskrit $X(n)$

Sifat-sifat Sinyal



Sifat Sinyal Sinusoida Waktu-Kontinu (Analog)

$$x_a(t) = A \sin(\omega_a t + \theta) \quad (2.5)$$

ω_a = frekuensi sudut sinyal analog (rad/sekon)

$$\omega_a = 2\pi f_a$$

f_a = frekuensi sinyal analog (Hz)

1. Untuk setiap nilai f_a yang tetap, $x_a(t)$ adalah periodik.

$$x_a(t + T_a) = x_a(t) \quad (2.6)$$

$T_a = 1/f_a$ = periode fundamental sinyal analog

Mudah dibuktikan dengan meninjau kembali gambar 2.1 dan 2.2.

Sifat-sifat Sinyal



fa.

2. Interval frekuensi sinyal sinusoida waktu-kontinu adalah

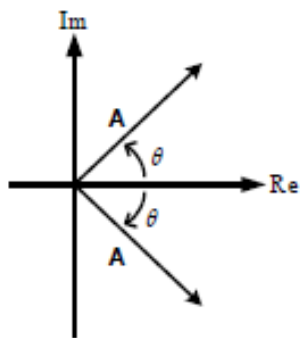
$$-\infty < f_a < \infty$$

Perlu diingat bentuk kompleks dan bentuk fasor:

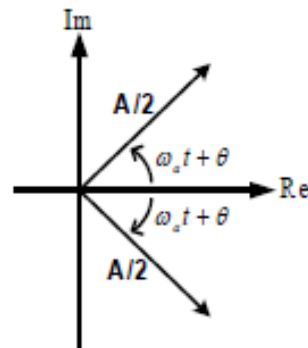
$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \quad (2.7)$$

$$Ae^{\pm j\theta} = A/\pm\theta \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) diilustrasikan pada gambar 2.6, dimana fasor positif bergerak berlawanan arah jarum jam dan fasor negatif bergerak searah jarum jam.



Gambar 2.6 Diagram Fasor



Gambar 2.7 Diagram fasor persamaan (2.9)

Maka, persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai:

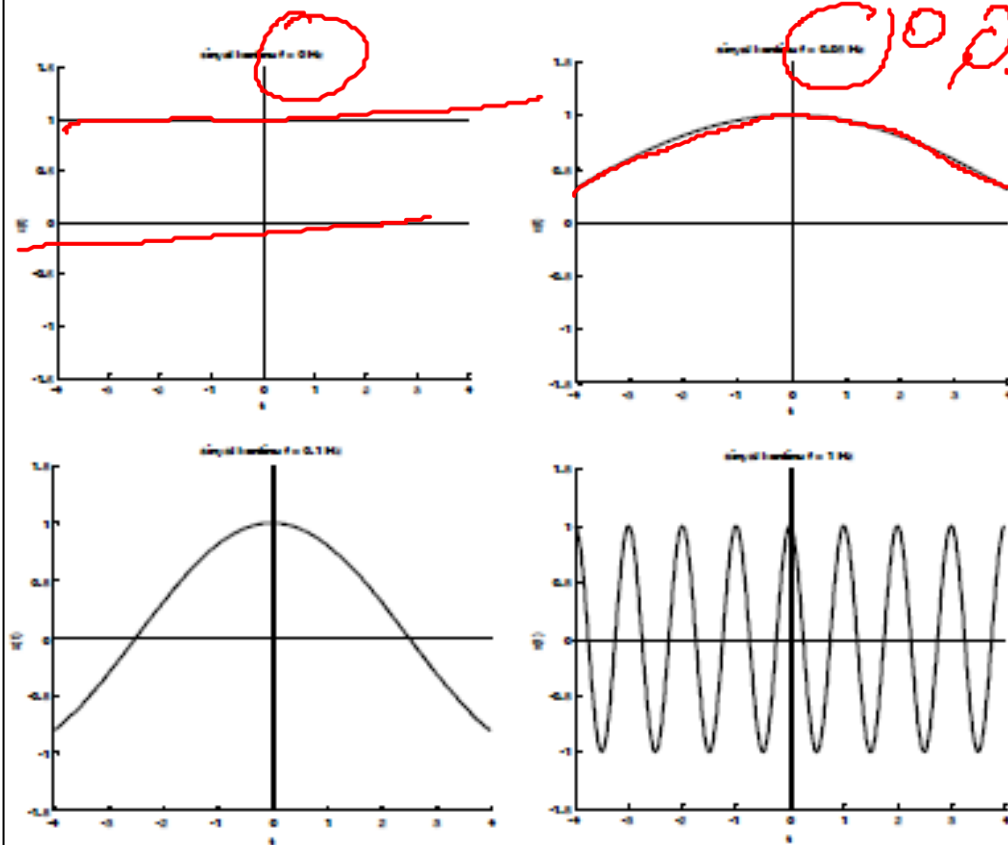
$$x_a(t) = A \cos(\omega_a t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_a t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_a t + \theta)} \quad (2.9)$$

Untuk kepentingan matematis, kedua frekuensi positif dan negatif digunakan. Karena itu interval frekuensi sinyal analog adalah $-\infty < f_a < \infty$.

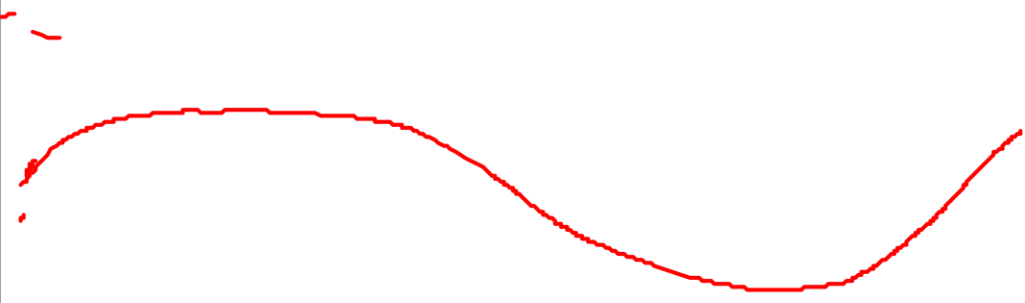
Sifat-sifat Sinyal



3. Penambahan frekuensi f_a menghasilkan pertambahan laju osilasi sinyal.



Gambar 2.8 Respon Sinyal Analog untuk Setiap Penambahan Frekuensi.





Sifat Sinyal Sinusoida Waktu-Diskrit

Jika sinyal diskrit dinyatakan sebagai:

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta) \quad (2.10)$$

$\omega_d = 2\pi f_d =$ frekuensi sudut sinyal diskrit (rad/sekon)

$f_d =$ frekuensi sinyal diskrit (putaran/cuplikan)

Sifat-sifat Sinyal



$\neq 0$

1. Sinyal sinusoida waktu-diskrit periodik hanya jika frekuensi f_d memiliki angka rasional

Sinyal waktu-diskrit $x(n)$ adalah periodik dengan periode N dan $N > 0$, jika dan hanya jika:

$$x(n+N) = x(n) \quad (2.11)$$

Tinjau sinusoida:

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= \cos 360^\circ = \cos 720^\circ = \dots \\ \cos \theta &= \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta + 4\pi) = \dots \\ \cos \theta &= \cos(\theta + 2k\pi) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sehingga, untuk persamaan (2.10):

$$x(n) = A \cos(2\pi f_d n + \theta) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} x(n+N) &= A \cos(2\pi f_d (n+N) + \theta) \\ x(n+N) &= A \cos(2\pi f_d n + 2\pi f_d N + \theta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bandingkan persamaan (2.12) dan (2.14). Keduanya bersesuaian, jika:

$$2\pi f_d N = 2k\pi \quad \text{atau} \quad f_d = \frac{k}{N} \quad (2.15)$$

N = periode fundamental sinusoida diskrit

k dan N adalah integer, dengan kata lain f_d adalah rasional. Perhatikan bahwa perubahan frekuensi yang sangat kecil dapat menghasilkan perubahan periode diskrit yang besar.

Misal:

$f_d = \frac{31}{60}$, dengan mudah dapat kita sebutkan $k = 31$ dan $N = 60$.

$f_d = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, maka dengan mengubah k menjadi 30, didapat $N = 2$

Sifat-sifat Sinyal



2. Sinusoida waktu-diskrit yang frekuensinya dipisahkan oleh kelipatan integer 2π adalah identik.

Bersesuaian dengan persamaan (2.12) untuk persamaan (2.10):

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta)$$

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta + 2k\pi) = A \cos(\omega_d n + \theta + 4k\pi)$$

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta + 6k\pi)$$

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta + 2k\pi)$$

$$x(n) = A \cos((\omega_d + 2k\pi)n + \theta)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dan hasilnya, seluruh barisan sinusoida:

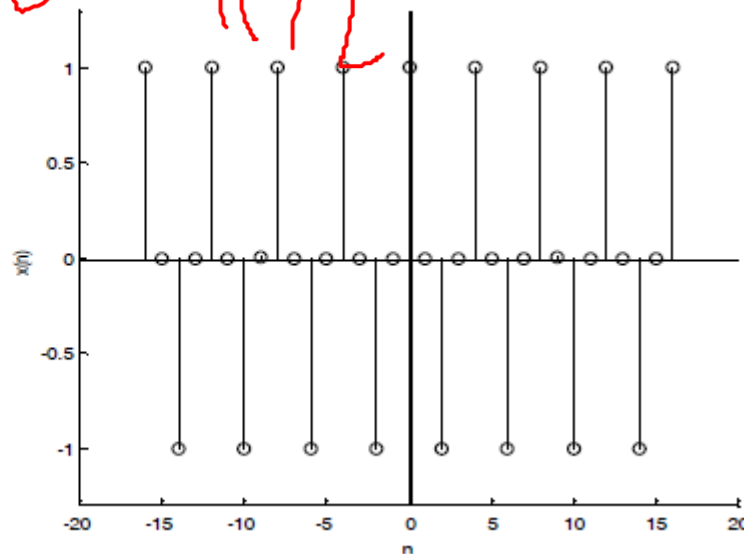
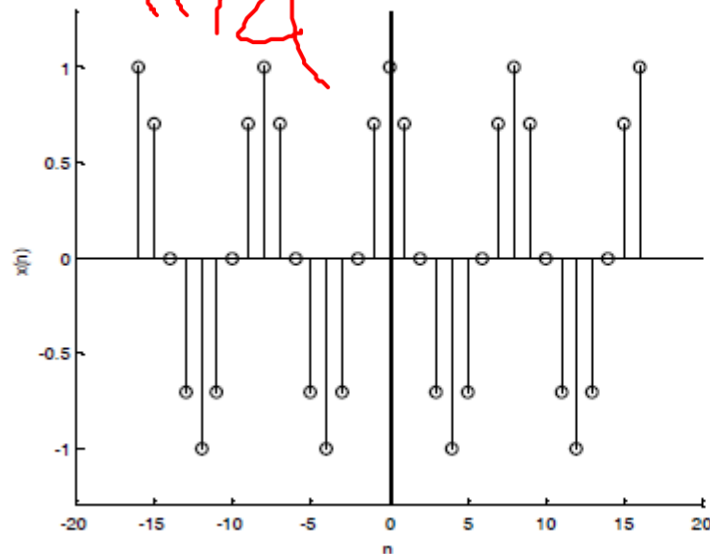
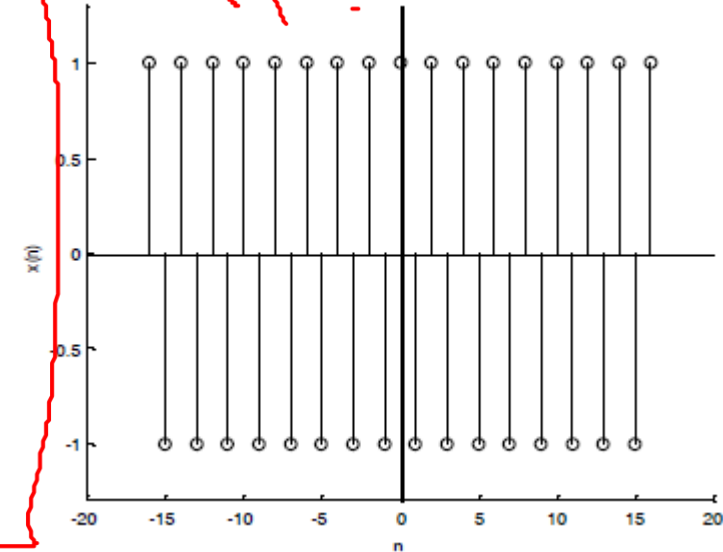
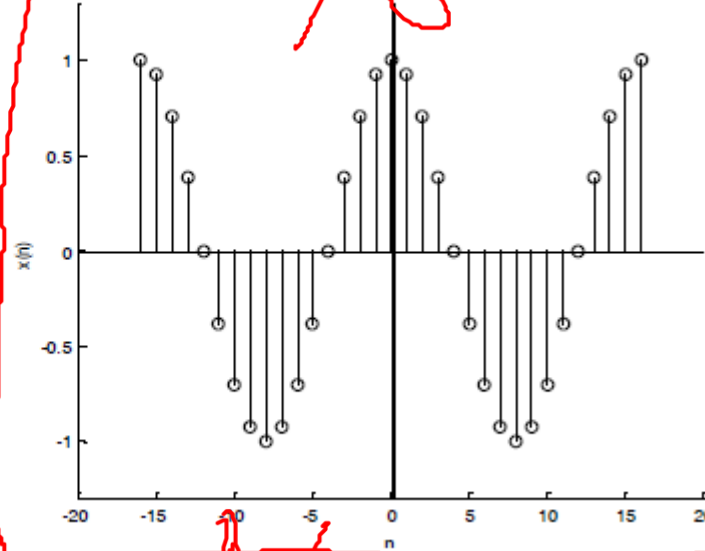
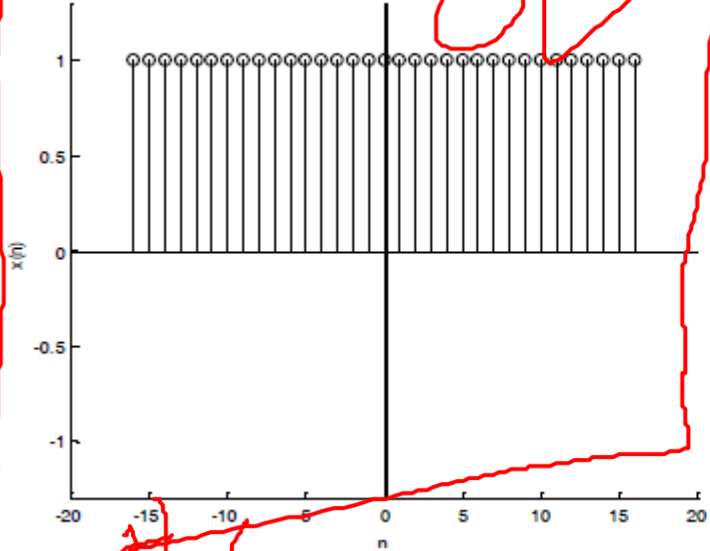
$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta) \quad (2.16)$$

Dimana:

$$\omega_k = \omega_d + 2k\pi \quad -\pi \leq \omega_d \leq \pi \quad \text{dan} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Persamaan (2.10) dan (2.16) adalah identik.

Sifat-sifat Sinyal



Gambar 2.9 Sinyal $x(n) = \cos(\omega_d n)$ dengan $\omega = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi$

Contoh soal



Tentukan nilai frekuensi f_a dan perioda T_a pada setiap persamaan sinusoida analog berikut, hitunglah nilai $x_a(t)$ pada saat t sama dengan $0, T_a/4, T_a/2, 3T_a/4$ dan T_a .

a. $x_a(t) = 2\sin(50t)$

b. $x_a(t) = 2\cos(50t + \frac{\pi}{6})$

$x_a(0) = 0$

$x_a(T_a/4) = 2$

$x_a(T_a/2) = 0$

$x_a(3T_a/4) = -2$

$x_a(T_a) = 0$

