



Teknik Pengolahan Sinyal

Konsep Frekuensi dalam Sinyal

Aqil Aqthobirrobbany, S.T., M.Eng.



Tujuan pembelajaran



- Memahami konsep dasar frekuensi dalam sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit
- Menjelaskan definisi frekuensi, perioda, frekuensi sudut, amplitudo dan fase dalam sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.
- Menyebutkan sifat-sifat sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Semua sinyal dalam pengolahan sinyal dapat didekati dengan model dasar sinyal sinus

1. Suatu sinyal sinusoida analog/kontinu dapat dinyatakan dengan persamaan matematik:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \theta) \text{ atau } X(t) = A \sin(2\pi f t + \theta)$$

Dimana:

$X(t)$ = Sinyal Analog

A = Amplitudo

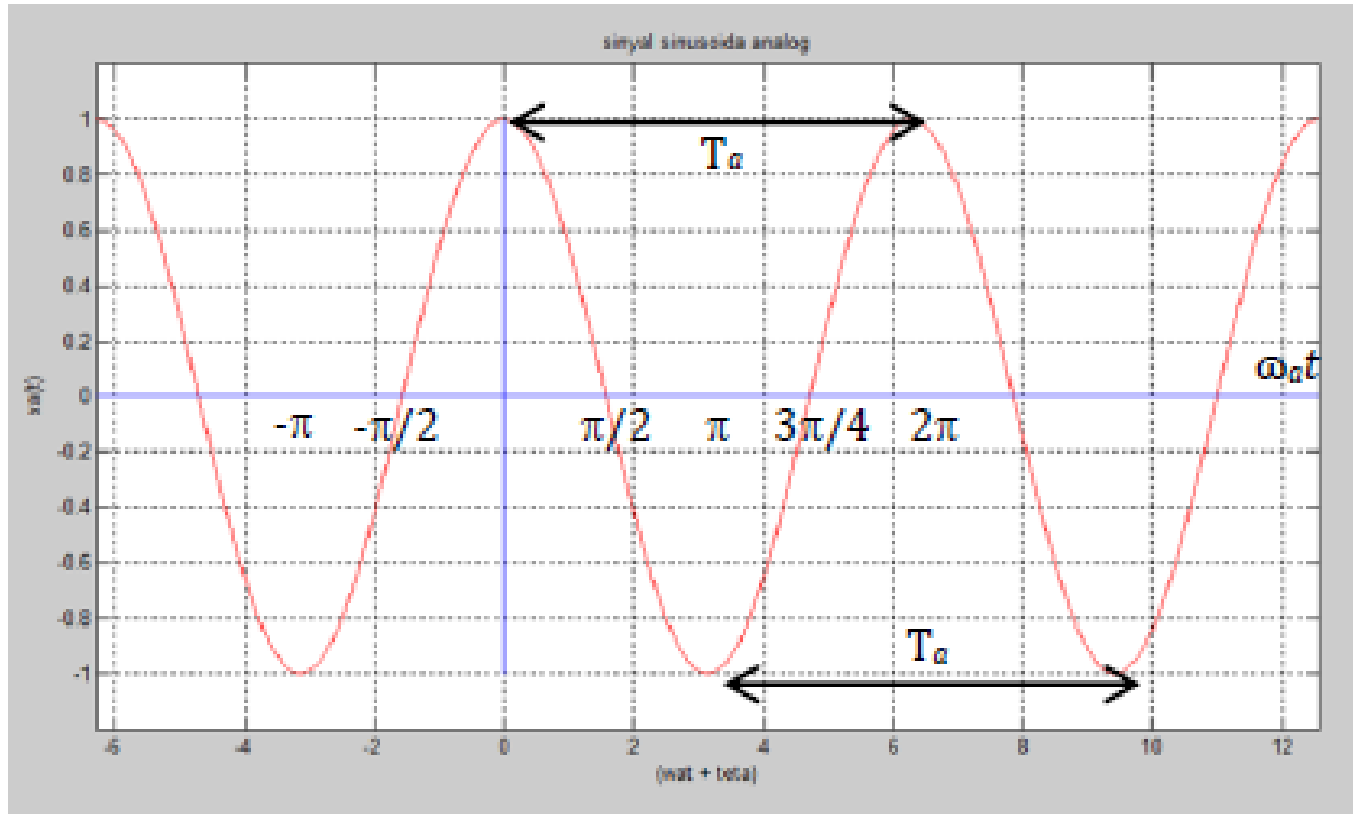
ω = frekuensi sudut (rad/det)

θ = fase (rad/detik)

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Bentuk sinyal dapat dilihat pada gambar berikut:



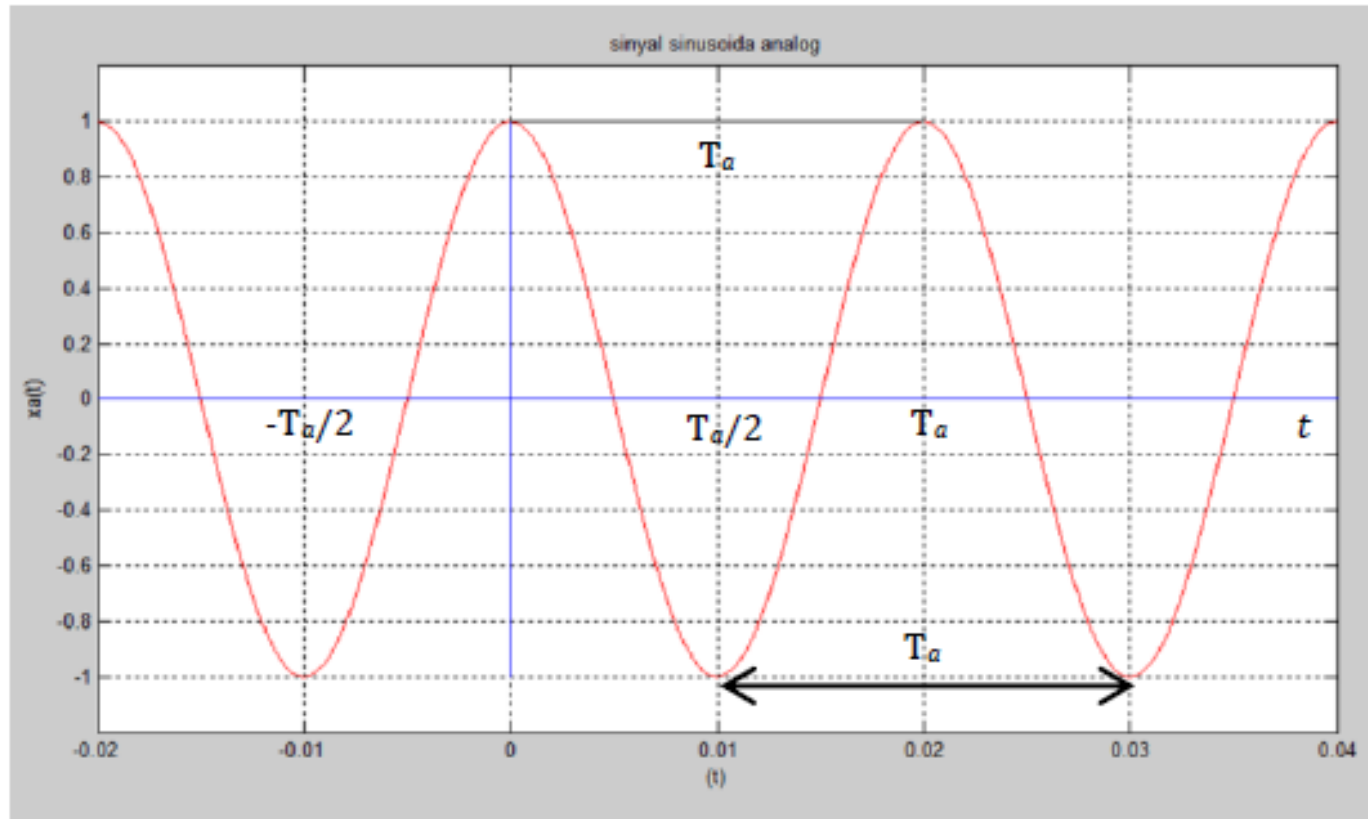
Dari Gambar 1 dapat dilihat fungsi berulang setiap 2π radian, sehingga dikatakan perioda $T_a = 2\pi$

Gambar 1. Fungsi Sinusoida $X(t)$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Bentuk sinyal dapat dilihat pada gambar berikut:



Dari Gambar 2 fungsi $X(t)$ Digambar terhadap t , sehingga periodanya adalah $T_a = t$

Gambar 2. Fungsi Sinusoida $X(t)$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



T adalah perioda dalam satuan detik, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh sinyal analog untuk bergetar/merambat sebanyak satu kali atau sebanyak satu putaran

f_a adalah dalam satuan hertz (Hz), yaitu jumlah getaran atau putaran yang dihasilkan gelombang analog dalam waktu 1 detik

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Dari definisi di atas, maka:

$$f_a = \frac{1}{T_a} \quad (2.2)$$

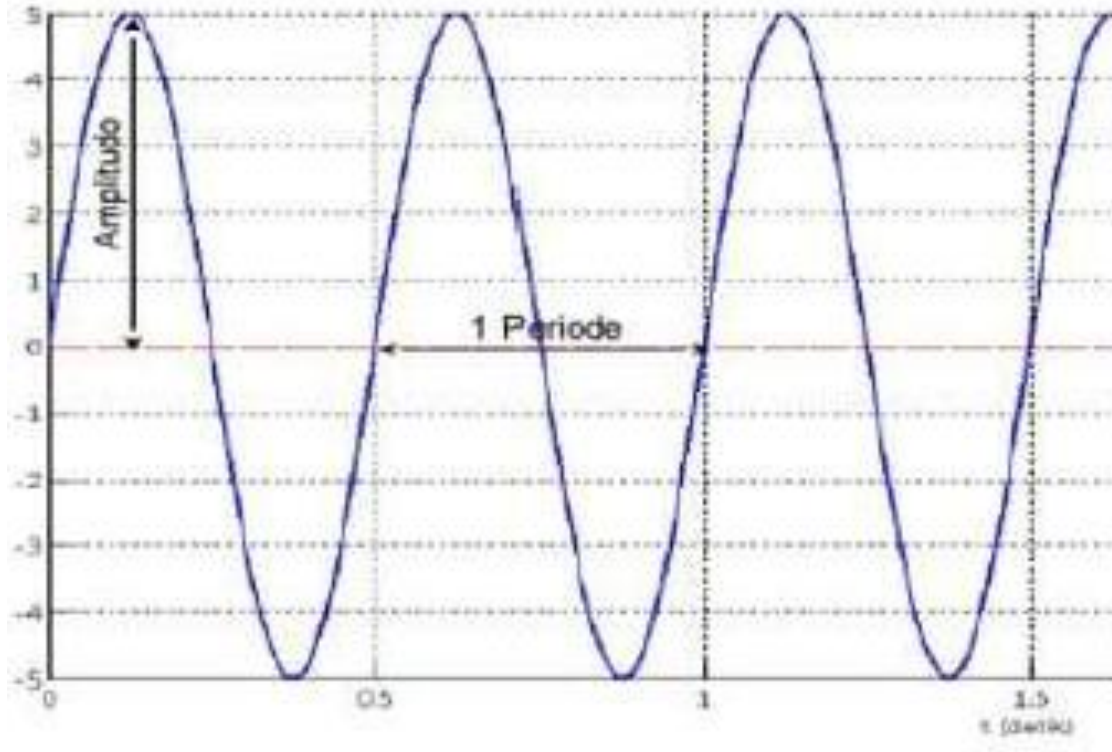
Lihat kembali gambar 2.1 dan 2.2. Untuk $\omega_a t = 2\pi$, dimana $t = T_a$, maka:

$$\omega_a T_a = 2\pi \rightarrow \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi f_a \quad (2.3)$$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-kontinu



Bentuk sinyal dapat dilihat pada gambar berikut:



Berapakah $X(t) = ?$

Gambar 2. Fungsi Sinusoida $X(t)$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-diskrit



2. Suatu sinyal sinusoida waktu-diskrit dapat dinyatakan sebagai:

$$X(n) = A \cos(\omega_d n + \theta)$$

Dimana:

n = Suatu variable integer

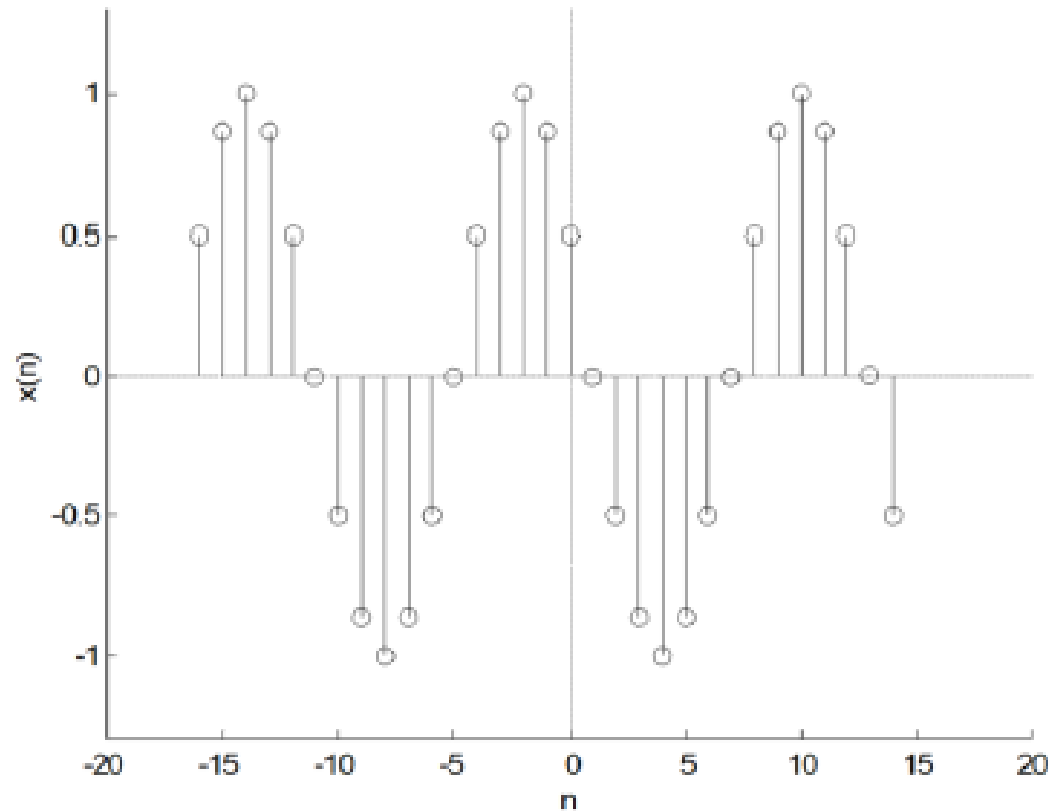
A = Amplitudo

ω_d = frekuensi sudut sinyal diskrit

θ = fase dalam radian

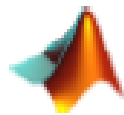
$$= 2\pi f_d$$

Konsep Frekuensi Sinyal Sinusoida Waktu-diskrit



N adalah perioda dalam satuan detik, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh sinyal diskrit untuk bergetar/merambat sebanyak satu cuplikan

f_d adalah Frekuensi dalam satuan hertz (Hz), yaitu jumlah cuplikan yang dihasilkan sinyal diskrit dalam waktu 1 detik



Gambar 4. Contoh Sinyal Sinusoida Waktu Diskrit $X(n)$



Sifat Sinyal Sinusoida Waktu-Kontinu (Analog)

$$x_a(t) = A \cos(\omega_a t + \theta) \quad (2.5)$$

ω_a = frekuensi sudut sinyal analog (rad/sekon)

$$\omega_a = 2\pi f_a$$

f_a = frekuensi sinyal analog (Hz)

1. Untuk setiap nilai f_a yang tetap, $x_a(t)$ adalah periodik.

$$x_a(t + T_a) = x_a(t + 2\pi) \quad (2.6)$$

$T_a = 1/f_a$ = periode fundamental sinyal analog

Mudah dibuktikan dengan meninjau kembali gambar 2.1 dan 2.2.

Sifat-sifat Sinyal



2. Interval frekuensi sinyal sinusoida waktu-kontinu adalah

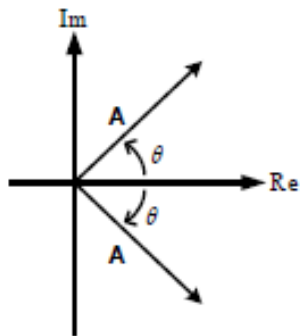
$$-\infty < f_a < \infty$$

Perlu diingat bentuk kompleks dan bentuk fasor:

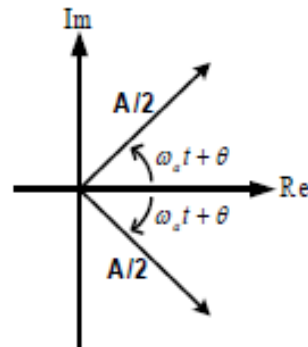
$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \quad (2.7)$$

$$Ae^{\pm j\theta} = A/\underline{\pm\theta} \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) diilustrasikan pada gambar 2.6, dimana **fasor positif** bergerak berlawanan arah jarum jam dan **fasor negatif** bergerak searah jarum jam.



Gambar 2.6 Diagram Fasor



Gambar 2.7 Diagram fasor persamaan (2.9)

Maka, persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai:

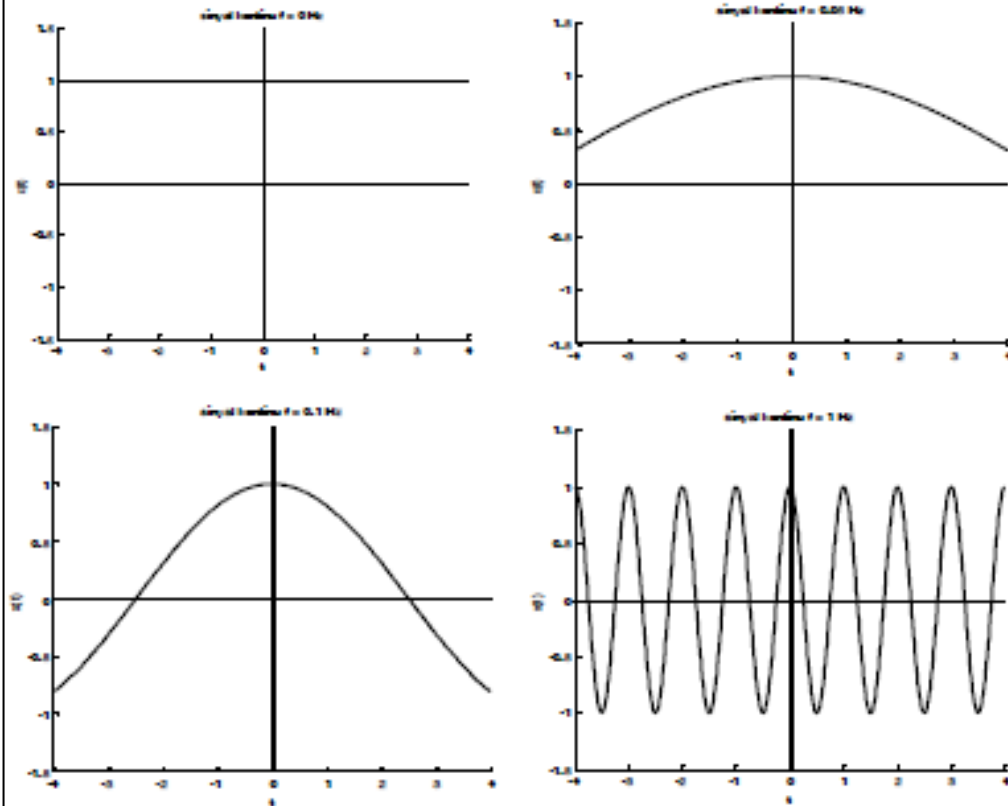
$$x_a(t) = A \cos(\omega_a t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_a t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_a t + \theta)} \quad (2.9)$$

Untuk kepentingan matematis, kedua frekuensi positif dan negatif digunakan. Karena itu interval frekuensi sinyal analog adalah $-\infty < f_a < \infty$.

Sifat-sifat Sinyal



3. Penambahan frekuensi f_a menghasilkan pertambahan laju osilasi sinyal.



Gambar 2.8 Respon Sinyal Analog untuk Setiap Penambahan Frekuensi.



Sifat Sinyal Sinusoida Waktu-Diskrit

Jika sinyal diskrit dinyatakan sebagai:

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta) \quad (2.10)$$

$\omega_d = 2\pi f_d =$ frekuensi sudut sinyal diskrit (rad/sekon)

$f_d =$ frekuensi sinyal diskrit (putaran/cuplikan)

Sifat-sifat Sinyal



1. Sinyal sinusoida waktu-diskrit periodik hanya jika frekuensi f_d memiliki angka rasional

Sinyal waktu-diskrit $x(n)$ adalah periodik dengan periode N dan $N > 0$, jika dan hanya jika:

$$x(n+N) = x(n) \quad (2.11)$$

Tinjau sinusoida:

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= \cos 360^\circ = \cos 720^\circ = \dots \\ \cos \theta &= \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta + 4\pi) = \dots \\ \cos \theta &= \cos(\theta + 2k\pi) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sehingga, untuk persamaan (2.10):

$$x(n) = A \cos(2\pi f_d n + \theta) \quad (2.13)$$

$$x(n+N) = A \cos(2\pi f_d (n+N) + \theta)$$

$$x(n+N) = A \cos(2\pi f_d n + 2\pi f_d N + \theta) \quad (2.14)$$

Bandingkan persamaan (2.12) dan (2.14). Keduanya bersesuaian, jika:

$$2\pi f_d N = 2k\pi \quad \text{atau} \quad f_d = \frac{k}{N} \quad (2.15)$$

N = periode fundamental sinusoida diskrit

k dan N adalah integer, dengan kata lain f_d adalah rasional. Perhatikan bahwa perubahan frekuensi yang sangat kecil dapat menghasilkan perubahan periode diskrit yang besar.

Misal:

$f_d = \frac{31}{60}$, dengan mudah dapat kita sebutkan $k = 31$ dan $N = 60$.

$f_d = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, maka dengan mengubah k menjadi 30, didapat $N = 2$

Sifat-sifat Sinyal



2. Sinusoida waktu-diskrit yang frekuensinya dipisahkan oleh kelipatan integer 2π adalah identik.

Bersesuaian dengan persamaan (2.12) untuk persamaan (2.10):

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta)$$

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta + 2k\pi) = A \cos(\omega_d n + \theta + 4k\pi)$$

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta + 6k\pi)$$

$$x(n) = A \cos(\omega_d n + \theta + 2k\pi) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x(n) = A \cos((\omega_d + 2k\pi)n + \theta) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dan hasilnya, seluruh barisan sinusoida:

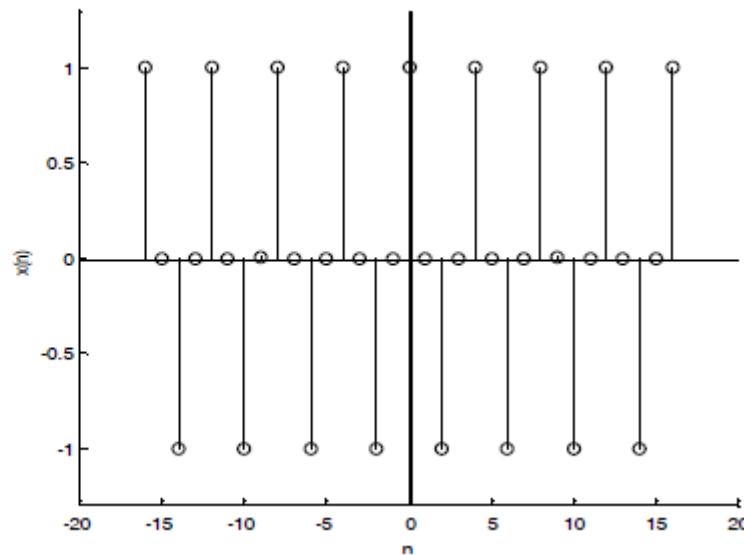
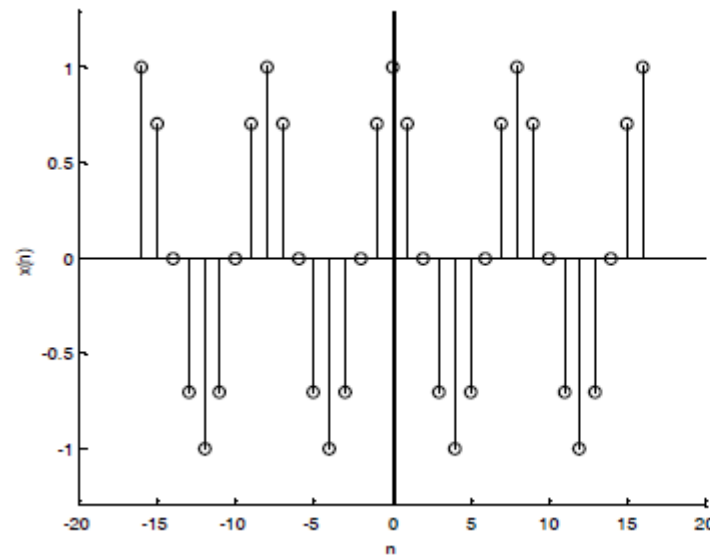
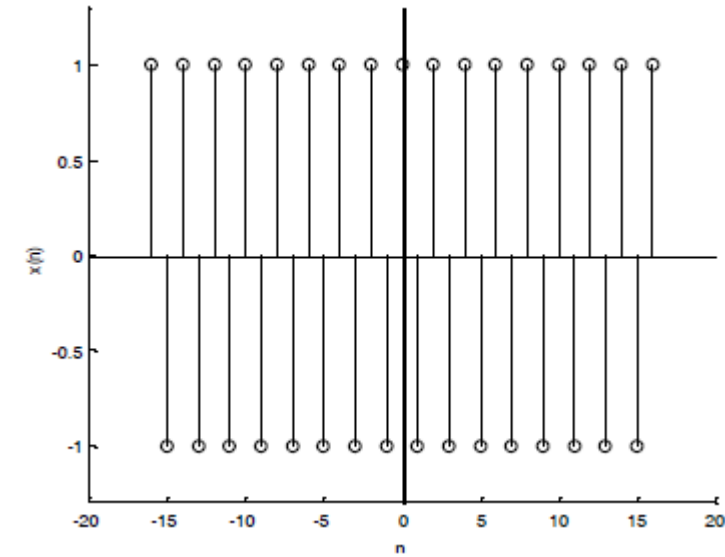
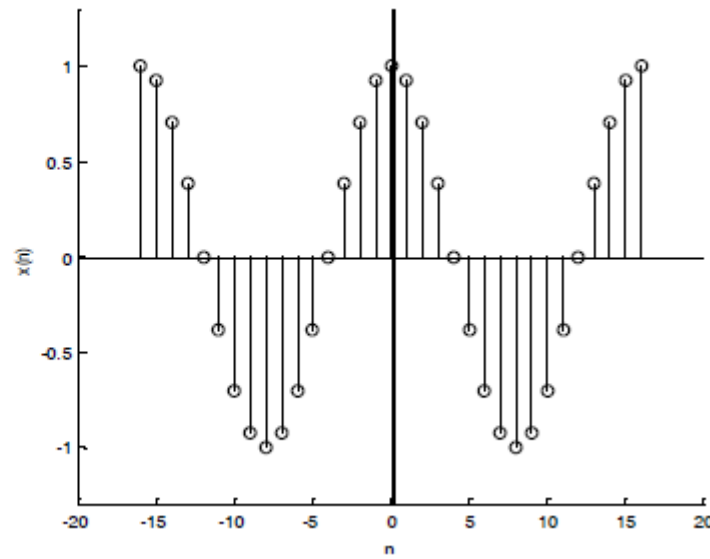
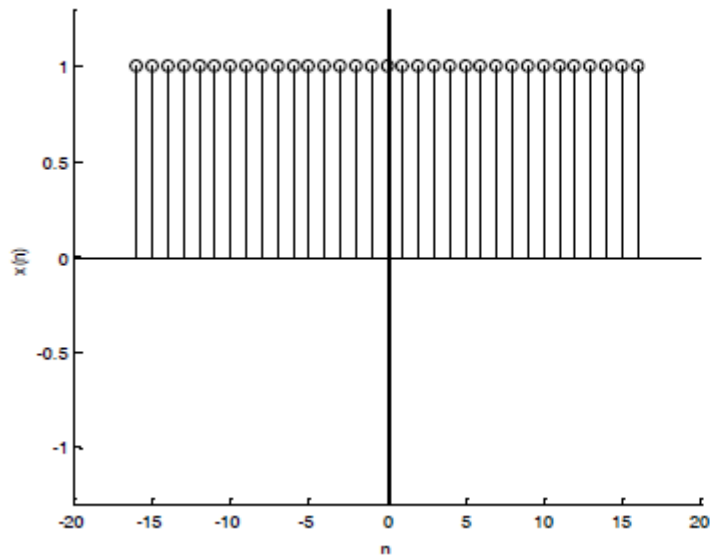
$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta) \quad (2.16)$$

Dimana:

$$\omega_k = \omega_d + 2k\pi \quad -\pi \leq \omega_d \leq \pi \quad \text{dan} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Persamaan (2.10) dan (2.16) adalah identik.

Sifat-sifat Sinyal



Gambar 2.9 Sinyal $x[n] = \cos(\omega_d n)$ dengan $\omega = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi$

Contoh soal



Tentukan nilai frekuensi f_a dan perioda T_a pada setiap persamaan sinusoida analog berikut, hitunglah nilai $x_a(t)$ pada saat t sama dengan $0, T_a/4, T_a/2, 3T_a/4$ dan $T_a/4$.

a. $x_a(t) = 2\sin(50t)$

b. $x_a(t) = 2\cos(50t + \frac{\pi}{6})$