

Transformasi Z

Pengertian

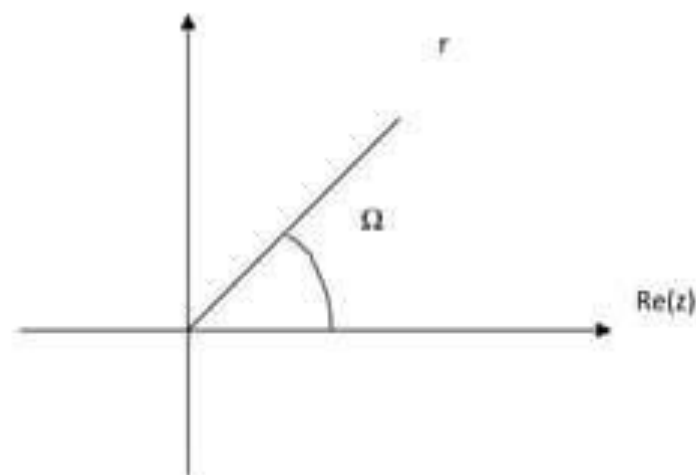
- ▶ Adalah suatu transformasi yang mengubah sinyal waktu diskrit ke dalam bentuk kompleks dalam domain frekuensi
- ▶ Berguna untuk menyelesaikan persamaan beda (*difference equation*). Hal ini serupa dengan kegunaan transformasi Laplace, tetapi berlaku untuk sinyal dan sistem waktu diskrit.

Pengertian (lanjutan)

- ▶ Transformasi-z dari suatu sinyal $x(n)$ didefinisikan sebagai:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

di mana z adalah suatu variabel bilangan kompleks, yaitu $z = re^{j\Omega}$.



Region Of Convergence

- ▶ Transformasi-z adalah suatu deret tak hingga, sehingga mungkin divergen untuk beberapa nilai z .
- ▶ Transformasi-z hanya didefinisikan untuk suatu daerah yang hasil transformasinya adalah terhingga, diberi nama *Region of Convergence*.
- ▶ *Region Of Convergence* (ROC) dari transformasi-z berbentuk :

$$R_1 < |z| < R_2, \text{ dimana } |z| = r.$$

dengan batas R_1 dan R_2 adalah tergantung pada sinyal yang ditransformasikan.

Contoh 1

- ▶ Cari Transformasi-Z dari sinyal-sinyal berikut:

a). $x_1(n) = \{1, 2, 3, 5, 7, 0, 1\}$

b). $x_2(n) = \{0, 0, 1, 2, 5, 0, 1\}$

- ▶ Jawab

a). $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 7z^{-4} + z^{-6}$; **ROC: $z \neq 0$**

b). $X_2(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6}$; **ROC: $z \neq 0$**

Contoh 1 (lanjutan)

- Cari Transformasi-Z dari sinyal:

$$x_3(n) = u(n) = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

- Jawab

$$X_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

jika $z^{-1} = A$, maka :

$$X_3(z) = 1 + A + A^2 + A^3 + \dots$$

kedua ruas dari persamaan di atas dikalikan dengan $(1 - A)$, dihasilkan:

$$X_3(z) = \frac{1}{1-A}$$



Sifat-sifat Transformasi Z

- Linier
- Penggeseran Waktu
- Perkalian dengan Waktu
- Pembalikan Waktu
- Perkalian dengan a^n
- Teorema Nilai Awal
- Teorema Nilai Akhir

Linier

- ▶ $Z[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

- ▶ **Contoh:**

Cari transformasi z dari $x(n) = u(n) + 0,9^n u(n)$

- ▶ **Jawab:**

Transformasi z dari $u(n) = z/(z - 1)$

Transformasi z dari $0,9^n u(n) = z/(z - 0,9)$

maka transformasi z dari $u(n) + 0,9^n u(n)$:

$$= \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0,9} = \frac{z(z-0,9) + z(z-1)}{(z-1)(z-0,9)} = \frac{2z^2 - 1,9z}{(z-1)(z-0,9)}$$

Penggeseran Waktu

- ▶ $Z[x(n-1)] = z^{-1}X(z) + x(-1)$
- ▶ $Z[x(n-2)] = z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)$
- ▶ $Z[x(n-k)] = z^{-k}X(z) + x(-k) + z^{-1}x(-k+1) + \dots$
 $+ z^{-k+1}x(-1)$
- ▶
- ▶ $Z[x(n+1)] = zX(z) - z x(0)$
- ▶ $Z[x(n+2)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1)$
- ▶ $Z[x(n+k)] = z^k X(z) - z^k x(0) - z^{k-1} x(1) - \dots$
 $- z x(k-1)$

Penggeseran Waktu (lanjutan)

- ▶ **Contoh**

Cari transformasi z dari $x(n) = u(n + 2)$

- ▶ **Jawab:**

$$Z[u(n+2)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1)$$

$$= z^2 \frac{z}{z-1} - z^2 - z = z^2 \frac{z}{z-1} - z^2 \frac{z-1}{z-1} - z \frac{z-1}{z-1}$$

$$= \frac{z^3 - z^3 + z^2 - z^2 + z}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

Perkalian dengan Waktu

- ▶ $Z[n x(n)] = -z \frac{d}{dz} [X(z)]$

- ▶ **Contoh :**

Tentukan transformasi z dari $x(n) = n.u(n)$

- ▶ **Jawab :**

$$\begin{aligned} Z[n.u(n)] &= -z \frac{d}{dz} [X(z)] & -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] &= -z \left[\frac{(z-1)1 - z(1)}{(z-1)^2} \right] \\ &= -z \left[\frac{-1}{(z-1)^2} \right] = \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Pembalikan Waktu

- ▶ $Z[x(-n)] = X(1/z)$

- ▶ **Contoh :**

Cari transformasi z dari $x(n) = u(-n)$

- ▶ **Jawab:**

$$Z[u(-n)] = \frac{z^{-1}}{z^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

Perkalian dengan a^n

- ▶ $Z[a^n x(n)] = X(z/a)$

- ▶ **Contoh :**

Tentukan transformasi z dari $x(n) = 0,8^n u(n)$

- ▶ **Jawab :**

$$Z[0,8^n u(n)] = X(z/0,8) = \frac{z/0,8}{z/0,8 - 1} = \frac{z}{z - 0,8}$$

Teorema Nilai Awal

► Jika $Z[x(n)] = X(z)$, maka $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

► **Contoh :**

Tentukan nilai awal $x(0)$ jika $X(z) = \frac{z}{z - 0,9}$

► **Jawab :**

$$\begin{aligned} x(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - 0,9} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teorema Nilai Akhir

- ▶ Jika $Z[x(n)] = X(z)$, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

- ▶ **Contoh :**

Tentukan nilai akhir $x(\infty)$ jika

$$X(z) = \frac{z}{z - 0,9}$$

- ▶ **Jawab :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 0,9} = 0$$



Tabel Pasangan Transformasi Z

No	Sinyal diskrit $x(n)$	Transformasi-z $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Seluruh z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z > a $
4	$n a^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z < a $
6	$-n a^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $

No	Sinyal diskrit	Transformasi-z	ROC
7	$(\cos \Omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \Omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \Omega_0 + z^{-2}}$ $= \frac{z^2 - z \cos \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$ z > 1$
8	$(\sin \Omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \Omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \Omega_0 + z^{-2}}$ $= \frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$ z > 1$
9	$(a^n \cos \Omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \Omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \Omega_0 + a^2 z^{-2}}$ $= \frac{z^2 - az \cos \Omega_0}{z^2 - 2az \cos \Omega_0 + a^2}$	$ z > a $
10	$(a^n \sin \Omega_0 n) u(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \Omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \Omega_0 + a^2 z^{-2}}$ $= \frac{az \sin \Omega_0}{z^2 - 2az \cos \Omega_0 + a^2}$	$ z > a $

Transformasi Z Satu Sisi

- ▶ Tidak berisi informasi tentang sinyal $x(n)$ untuk waktu negatif atau $n < 0$
- ▶ Bersifat unik hanya untuk sinyal kausal, karena sinyal-sinyal ini yang bernilai nol untuk $n < 0$
- ▶ Bila kita membahas transformasi z satu sisi, kita tidak perlu membahas ROC-nya.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Invers Transformasi Z

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- ▶ Menghitung langsung integral kontur
- ▶ Ekspansi dalam deret pangkat, dengan variabel z dan z^{-1}
- ▶ Ekspansi pecahan parsial dan melihat tabel pasangan transformasi

Ekspansi Pecahan Parsial

1. $X(z)$ terdiri dari *pole-pole* riil dan tak berulang
2. $X(z)$ terdiri dari *pole-pole* riil dan berulang
3. $X(z)$ terdiri *pole-pole* pasangan kompleks

Pole Riil dan Tak berulang

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}; \quad \text{dengan } m \leq n$$

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \dots + \frac{a_n}{z - p_n}$$

$$a_i = \left[(z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}$$

Contoh 2

- Tentukan invers transformasi z dari:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}; \text{ jika ROC: } |z| > 1$$

- Jawab:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-0,5}$$

$$a_1 = \left[(z-1) \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} \right]_{z=1} = \left[\frac{z}{(z-0,5)} \right]_{z=1}$$

Contoh 2 (lanjutan)

$$a_2 = \left[(z - 0,5) \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} \right]_{z=0,5} = \left[\frac{z}{(z-1)} \right]_{z=0,5} = \dots$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0,5}$$

$$X(z) = 2 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$x(n) = 2u(n) - (0,5)^n u(n)$$